ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

Факультативный курс 9

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

9 класс

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

22.1я72
И32

И. Н. Антипов, Н. Я. Виленкин,
О. С. Ивашев-Мусатов, А. Г. Мордкович

Составители: *О. А. Боковнев, В. В. Фирсов,*
С. И. Шварцбурд

Рекомендовано к изданию
Главным управлением школ МП СССР

Избранные вопросы математики. 9 кл. Факультативный
И32 курс. — М.: Просвещение, 1979. — 191 с., ил.

Книга содержит теоретический материал и упражнения по темам факультативного курса по математике для девятых классов.

И $\frac{\text{60601— 673}}{\text{103(03) — 79}}$ **инф. письмо 4306020400**

ББК 22.1я72
51(075)

© Издательство «Просвещение», 1979 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Метод математической индукции 5
Элементы комбинаторики 28
Элементы теории вероятностей 52
Языки программирования 107
Бинарные отношения и соответствия 139

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебным пособием по факультативному курсу «Избранные вопросы математики» для IX класса средней школы. Как известно, этот курс вводится в школу взамен ранее существовавшего курса «Дополнительные главы и вопросы к систематическому курсу математики» в связи с завершением перехода на новые программы. Содержание пособия в основном соответствует программе факультативного курса, утвержденной Министерством просвещения СССР в 1977 г. В данное пособие не включен материал по изображению пространственных фигур на плоскости — этот материал будет опубликован отдельно. Кроме того, в книгу дополнительно включены две главы, посвященные изложению метода математической индукции и элементов комбинаторики. Это связано с исключением соответствующего материала из основного курса математики. В связи с этим программа факультатива должна подвергнуться естественной корректировке, включающей в себя, в частности, некоторое перераспределение основных и дополнительных тем.

В идейном плане и по своим методическим установкам настоящее пособие продолжает аналогичную книгу, предназначенную для учащихся VII—VIII классов. Однако содержание этих пособий независимо, что позволяет начинать факультативные занятия в IX классе.

Как указывалось в предисловии к пособию для VII—VIII классов, целью курса «Избранные вопросы математики» является развитие интересов и склонностей учащихся к математике.

Программа курса состоит из ряда независимых разделов, так что изучение любой темы факультатива не предполагает изучения тем предыдущих лет. Выбор тем для преподавания производится учителем или преподавателем факультативной группы. При этом он руководствуется своими возможностями и возможностями своих учеников. Вместе с тем программа факультатива предусматривает разбиение тем на основные (обязательные), которые рекомендуется изучать в первую очередь, и дополнительные темы по выбору учителя. Поэтому общее число включенных в программу тем избыточно, т. е. некоторые темы (из числа дополнительных) изучаться не будут.

В программу курса внесены наиболее важные в математическом плане вопросы, углубляющие основные направления общего

курса математики. Каждая тема факультатива непосредственно связана с материалом основного курса. При этом программа предусматривает достижение двух целей: а) довести изучение материала до уровня, на котором учащемуся становится ясной его принципиальная математическая значимость, до известной степени завершенности; б) показать непосредственные выходы школьной математики в сферы серьезной науки и ее приложений. Предполагается, что в ходе занятий будет показана история возникновения и развития ряда изучаемых методов, концепций и идей, их значение для математики и других наук и областей практической деятельности.

Материал курса не дублирует вузовских программ, но позволяет с более общих позиций взглянуть на школьную математику и усмотреть единство предмета и метода математической науки. Поэтому существенно важно не развивать в обучении те специальные методы, приемы и навыки, которым обучают в вузах, а показать учащимся, как из материала школьного курса математики возникают общие концепции, обладающие теоретической и прикладной ценностью.

Весьма существенное место на факультативных занятиях по математике должно занимать решение задач. Предполагается, что изучение любой темы сопровождается решением значительного их числа. В настоящем пособии такие задачи включены в содержание разделов книги. При этом среди них весьма значительное число почти традиционных школьных задач.

Помимо этого, программа факультатива предусматривает обязательное выделение времени для решения задач повышенной трудности по общему курсу математики. Таким образом, задачи по общему курсу математики предполагается решать не только при изучении тем факультатива, но и специально отводить занятия, посвященные решению и обсуждению задач.

Учитывая выход задачников по алгебре и геометрии в сериях издательства «Просвещение», а также наличие значительного количества задачной литературы, в содержание настоящего пособия не включены разделы, посвященные задачам повышенной трудности. Мы считаем, что в этом вопросе полезно предоставить определенную инициативу учителю, который знает своих учеников, их математическую подготовку и круг их интересов.

Отзывы и предложения просим направлять по адресу: Москва, 129846, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Издательство «Просвещение», редакция математики.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1. Дедукция и индукция. Одной из отличительных черт математики и таких наук, как теоретическая механика, теоретическая физика, математическая лингвистика, является дедуктивное построение теории. Дедуктивное рассуждение — это рассуждение от общего к частному, т. е. рассуждение, исходным моментом которого является общее утверждение, а заключительным моментом — частный вывод.

В математике мы пользуемся дедукцией, проводя рассуждения, например, такого типа: известно, что *любой* равнобедренный треугольник имеет ось симметрии, а поскольку *данный* треугольник равнобедренный, то он имеет ось симметрии. Слово *дедукция* в переводе на русский язык означает «вывод».

Дедукция не является единственным методом научного мышления. В физике, химии, биологии широко используются апелляция к наблюдению и опыту, индуктивные рассуждения. Слово *индукция* в переводе на русский язык означает «наведение», а индуктивными называют выводы, сделанные на основе наблюдений и опытов, т. е. полученные путем рассмотрения частных случаев и последующего распространения замеченных закономерностей на общий случай.

Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те положения, из которых потом путем дедукции делаются дальнейшие умозаключения. В математике индукция часто позволяет угадать формулировки теорем, а в ряде случаев и наметить пути доказательств.

2. Полная и неполная индукция. Пусть требуется установить, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|. \qquad (1)$$

Здесь могут представиться 4 случая:

1) $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; 2) $a < 0$, $b \geqslant 0$; 3) $a \geqslant 0$, $b < 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$.

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $|a+b| = a + b$, $|a| = a$, $|b| = b$, а потому неравенство (1) принимает вид: $a + b \leqslant a + b$. Это неравенство истинно.

Если $a < 0$, $b \geqslant 0$, то $a + b$ заключено между a и b, $a \leqslant a + b < b$ и потому $|a+b|$ не превосходит большего из чисел $|a|$, $|b|$. Но тогда $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Аналогично обстоит дело в случае, когда $a \geqslant 0$, $b < 0$.

Пусть, наконец, $a < 0$, $b < 0$. Тогда $|a + b| = -a - b$, $|a| = -a$, $|b| = -b$, и неравенство (1) принимает вид: $-a - b \leqslant -a - b$. Это неравенство истинно.

Итак, неравенство (1) истинно в каждом из четырех случаев, которые могли бы представиться.

Такой метод перебора конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называется *полной индукцией*. Он используется в математике довольно часто. Например, чтобы доказать теорему о величине вписанного угла, надо последовательно разобрать три случая: центр окружности лежит на одной из сторон угла, центр окружности лежит внутри угла, центр окружности лежит вне угла. Доказав теорему в каждом из этих случаев, мы тем самым докажем ее в общем виде, так как всегда имеет место один из них.

Таким образом, полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа случаев, которые могли бы представиться. Несмотря на свое название, метод полной индукции является на самом деле не индуктивным, а дедуктивным: применяя его, мы опираемся на общие положения логики, позволяющие расчленять общий случай на конечное число частных случаев и рассматривать их в отдельности.

Иногда общий результат удается угадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев — это так называемая *неполная индукция*. Результат, полученный неполной индукцией, остается, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением. Иными словами, неполная индукция в математике не считается методом строгого доказательства, но является мощным эвристическим методом открытия новых истин.

Например, рассматривая четные числа, большие двух, замечаем, что каждое из них является суммой двух простых чисел: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 7 + 7$, $16 = 3 + 13$, $18 = 5 + 13$, $20 = 3 + 17$ и т. д. Это наблюдение приводит к гипотезе, что любое четное число, большее 2, является суммой двух простых чисел. Однако, несмотря на усилия многих выдающихся математиков, это утверждение, называемое *гипотезой Гольдбаха* (по имени немецкого математика XVIII в. Христиана Гольдбаха, члена Петербургской Академии наук), до сих пор не доказано в общем виде. Наиболее сильный результат в этом направлении получил советский математик академик И. М. Виноградов, доказавший, что любое достаточно большое четное число является суммой четырех простых чисел.

Но часто сделанное наблюдение приводит к предположению, которое удается потом доказать. Пусть, например, требуется найти сумму первых n нечетных чисел. Рассмотрим частные случаи:

$$1 = 1,$$
$$1 + 3 = 4,$$
$$1 + 3 + 5 = 9,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Замечаем, что $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$. После рассмотрения этих частных случаев напрашивается следующий общий вывод:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \qquad (2)$$

т. е. *сумма первых n нечетных чисел равна* n^2. В следующем пункте мы познакомимся с методом, пользуясь которым можно доказать, что формула (2) верна.

Следует отметить, что индуктивные рассуждения могут привести к ошибочным выводам. Так, рассматривая числа вида $2^{2^n} + 1$, французский математик XVII в. Пьер Ферма заметил, что при $n = 1, 2, 3, 4$ получаются простые числа. Он предположил, что все числа такого вида простые. Однако крупнейший математик XVIII в. Леонард Эйлер (швейцарец по происхождению, жил и работал в Петербурге) нашел, что уже при $n = 5$ число $2^{32} + 1$ не является простым — оно делится на 641.

Приведем еще один поразительный пример ошибочного вывода, сделанного индуктивным путем. Требуется выяснить, существует ли такое натуральное число n, что число вида $991n^2 + 1$ будет точным квадратом. Рассматривая частные случаи при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, мы будем получать числа, не являющиеся точными квадратами. Если бы мы в течение многих лет только тем и занимались, что производили вычисления для последовательных натуральных чисел, то каждый раз получали бы числа, не являющиеся точными квадратами. Вполне естественно предположить, что при всех натуральных значениях n числа вида $991n^2+1$ не будут точными квадратами. Однако это неверно: существует 29-значное число m, такое, что $991m^2 + 1$ — точный квадрат.

Итак, неполная индукция может привести к ошибке. Однако довольно часто она позволяет угадать правильный результат.

Упражнения

1. $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots + (-1)^n n$. Вычислив S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, угадайте, чему будет равна сумма S_{316}; S_{327}.

2. Справедливо ли утверждение: $n^2 + n + 17$ — простое число при любом натуральном n? Проверьте при $n = 1, 2, 3, \ldots, 15, 16$.

3. Метод математической индукции. Полная индукция имеет в математике ограниченное применение. Многие интересные математические предложения охватывают бесконечное множество частных случаев, а провести проверку для бесконечного множества случаев человек не может (примером подобного предложения слу-

жит любое утверждение, относящееся ко всем натуральным числам). Неполная же индукция, как мы видели, может привести к ошибочным результатам.

Во многих случаях выход из этого затруднения находится в обращении к особому методу рассуждений, называемому *методом математической индукции*. Он заключается в следующем.

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n (например, нужно доказать, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2). Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение, проверяют сначала его справедливость для $n = 1$. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при $n = k$ вытекает и его справедливость при $n = k + 1$. Тогда утверждение считается доказанным для всех $n \in N$. В самом деле, получаем, если утверждение справедливо при $n = 1$, то тогда оно справедливо и для следующего числа: $n = 1 + 1 = 2$. Из справедливости утверждения для $n = 2$ вытекает его справедливость для $n = 2 + 1 = 3$. Отсюда, в свою очередь, следует справедливость утверждения для $n = 4$ и т. д. Ясно, что в конце концов мы дойдем таким образом до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

Обобщая сказанное, сформулируем следующий общий принцип.

Принцип математической индукции. Если предложение, в формулировку которого входит натуральное число n, истинно при $n = 1$ и из его истинности при $n = k$ (где $k \in N$) следует, что оно истинно и при $n = k + 1$, то оно истинно при всех натуральных значениях n.

В ряде случаев бывает нужно доказать справедливость некоторого утверждения не для всех натуральных чисел, а лишь для $n \geqslant p$, где p — фиксированное натуральное число. В этом случае принцип математической индукции формулируется следующим образом: *если предложение истинно при $n = p$ и из его истинности при $n = k$, где $k \geqslant p$, следует, что оно истинно и при $n = k + 1$, то предложение истинно для любого $n \geqslant p$.*

Доказательство по методу математической индукции проводится следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется при $n = 1$. Эту часть доказательства называют *базисом индукции*. Если при $n = 1$ предложение истинно, то переходят ко второй части доказательства, называемой *индукционным шагом*. В этой части доказывается справедливость утверждения для $n = k + 1$ в предположении справедливости утверждения для $n = k$ (предположение индукции).

Пример 1. Докажем методом математической индукции истинность равенства (2) из предыдущего пункта, т. е. докажем, что

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. 1) При $n = 1$ левая часть содержит одно слагаемое 1, а правая часть равна 1^2. Поэтому доказываемое равенство принимает вид: $1 = 1^2$. Это верное равенство, значит, при $n = 1$ равенство (2) истинно.

2) Предположим равенство (2) истинно при $n = k$, т. е. что справедливо равенство

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Докажем, что тогда равенство (2) истинно и при $n = k + 1$, т. е. что справедливо равенство

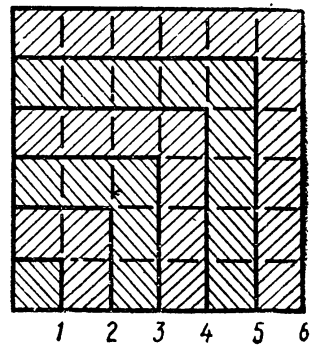


Рис. 1

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Имеем:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + 2k + 1.$$

Но по предположению индукции сумма в квадратных скобках равна k^2. Значит, вся сумма равна $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Итак,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Тем самым по принципу математической индукции истинность равенства (2) доказана для любых $n \in \boldsymbol{N}$.

Равенство (2) было известно еще древнегреческим геометрам, но они доказывали его не с помощью метода математической индукции, а чисто геометрически. Идея доказательства ясна из рисунка 1: квадрат со стороной n является объединением Г-образных фигур, площади которых равны 1, 3, 5, ..., $(2n - 1)$.

Приведем теперь два примера, показывающие, что неправильное применение метода математической индукции может иногда привести к абсурдным выводам.

«Докажем», что любое конечное множество натуральных чисел состоит из равных друг другу чисел.

Проведем индукцию по числу элементов в множестве. При $n = 1$ утверждение очевидно — каждое число равно самому себе. Пусть теорема доказана для множеств из k элементов. Возьмем $k + 1$-элементное множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. По предположению индукции $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$. Далее, по тому же предположению $a_2 = a_3 = \ldots = a_k = a_{k+1}$ и поэтому $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = a_{k+1}$. По принципу математической индукции заключаем, что утверждение справедливо при всех значениях $n \in \boldsymbol{N}$.

Ошибочность проведенного рассуждения состоит в том, что переход от k к $k + 1$ возможен здесь лишь при $k \geqslant 2$, а перейти от $n = 1$ к $n = 2$ с помощью этого рассуждения нельзя.

«Докажем» еще, что любое натуральное число равно следующему за ним натуральному числу.

Предположим, что утверждение справедливо при $n = k$, т. е. что $k = k + 1$. Докажем, что тогда теорема верна и при $n = k + 1$, т. е. что $k + 1 = k + 2$. Но это очевидно, ибо если к обеим частям равенства $k = k + 1$ прибавить по 1, то равенство не нарушится и мы получим $k + 1 = k + 2$. По принципу математической индукции заключаем, что утверждение справедливо при всех значениях n.

Ошибочность проведенного рассуждения состоит в том, что мы «забыли» проверить справедливость теоремы при $n = 1$. Поскольку при $n = 1$ она неверна ($1 \neq 2$), то метод математической индукции здесь неприменим.

Иногда вместо принципа математической индукции принимают в качестве аксиомы одно из следующих предложений:

А. Если множество натуральных чисел содержит число 1 и вместе с числом k всегда содержит и число $k + 1$, то это множество совпадает с множеством всех натуральных чисел.

Б. В каждом непустом множестве натуральных чисел имеется наименьший элемент.

Можно показать, что принцип математической индукции и каждое из предложений А и Б равносильны (любые два из этих положений являются следствиями третьего). Исходя из предложения Б, нетрудно доказать следующую теорему, дающую другую формулировку принципа математической индукции.

Теорема. ***Если утверждение справедливо для $n = 1$ и из того, что оно верно для всех натуральных чисел, меньших k, где $k > 1$, следует его справедливость для k, то оно верно для всех натуральных чисел.***

4. Применение метода математической индукции в задачах на суммирование и для доказательства тождеств.

Пример 2. Выведем формулу для суммы

$$S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^n \cdot (2n - 1).$$

Решение. Имеем: $S_1 = -1$,
$S_2 = -1 + 3 = 2$,
$S_3 = -1 + 3 - 5 = -3$,
$S_4 = -1 + 3 - 5 + 7 = 4$.

Рассмотренные частные случаи позволяют высказать предположение, что $S_n = (-1)^n \cdot n$. Воспользовавшись методом математической индукции, докажем справедливость этого предложения, т. е. докажем, что

$$S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^n \cdot (2n - 1) = (-1)^n \cdot n.$$

1) Истинность равенства при $n = 1, 2, 3, 4$ уже установлена выше.

2) Предположим, что

$$S_k = -1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^k \cdot (2k - 1) = (-1)^k \cdot k,$$

и докажем, что тогда

$$S_{k+1} = -1 + 3 - 5 + \ldots + (-1)^k \cdot (2k - 1) + \\ + (-1)^{k+1} \cdot (2k + 1) = (-1)^{k+1} \cdot (k + 1).$$

В самом деле, имеем:

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^{k+1} \cdot (2k + 1) = \\ = (-1)^k \cdot k + (-1)^{k+1} \cdot (2k + 1) = \\ = (-1)^{k+1} (-k + 2k + 1) = (-1)^{k+1} \cdot (k + 1).$$

По принципу математической индукции заключаем, что наше предложение истинно для любых $n \in \boldsymbol{N}$.

Пример 3. Выведем формулу для суммы

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3\ 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение. Равенства

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

приводят к индуктивному предположению, что

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \qquad (3)$$

Докажем это равенство методом математической индукции.

1) Истинность при $n = 1, 2, 3$ уже установлена выше.

2) Предположим, что наше утверждение справедливо при $n = k$:

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Тогда

$$S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Но $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ — это равенство (3) при $n = k + 1$.

По принципу математической индукции заключаем, что доказываемое равенство истинно при всех натуральных значениях n.

Пример 4. Докажем, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \\ = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \ldots + \frac{1}{100}.$$

Р е ш е н и е. Сформулируем задачу в более общем виде: докажем, что при всех натуральных значениях n выполняется тождество

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \ldots\ +\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2n}. \qquad (4)$$

1) При $n=1$ левая часть тождества (4) принимает вид: $1-\frac{1}{2}$, а правая — вид $\frac{1}{1+1}$. Так как $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ — верное равенство, то получаем, что при $n=1$ равенство (4) истинно.

2) Предположим, что это равенство истинно при $n=k$, т. е. что

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ \ldots\ +\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2k}.$$

Докажем, что тогда оно истинно и при $n=k+1$, т. е. что

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ \ldots\ +\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ \ldots\ +\frac{1}{2k+2}.$$

В самом деле,

$$\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ \ldots\ +\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{k+2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

Итак, из истинности равенства (4) при $n=k$ следует, что оно истинно и при $n=k+1$. Значит, по принципу математической индукции тождество (4) доказано при всех $n\in N$. При $n=50$ получаем равенство, указанное в условии задачи.

Упражнения

3. Докажите следующие равенства:

а) $1+2+3+\ \ldots\ +n=\frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3+2^3+3^3+\ \ldots\ +n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

г) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

д) $1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \ldots + (3n-2)(3n+1) = n(n+1)^2$;

е) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

ж) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;[1]

з) $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$;

и) $(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

4. Выведите формулы для следующих сумм:

а) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

в) $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2$.

5. Выведите формулы для следующих произведений:

а) $P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$;

б) $P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

6. Докажите следующие тождества:

а) $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, $x \neq 1$;

б) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \frac{1}{x^2 - 1}\left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2n - 1$, $x \neq 0, 1, -1$;

в) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+3}{4} + \frac{x+7}{8} + \ldots + \frac{x+2^n-1}{2^n} = \frac{(x-1)(2^n-1)}{2^n} + n$.

5. Применение метода математической индукции к доказательству неравенств.

Пример 5. Докажем, что если $a > b$ и a, b — положительные числа, то $a^n > b^n$.

Решение. При $n = 1$ утверждение очевидно: $a^1 > b^1$. Предположим, что $a^k > b^k$. Докажем, что тогда $a^{k+1} > b^{k+1}$.

В самом деле, перемножив почленно неравенства $a^k > b^k$ и $a > b$, получим: $a^{k+1} > b^{k+1}$.

---

[1] Символом $n!$ (читается «n-факториал») обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Следовательно, на основании принципа математической индукции утверждение доказано для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Пример 6. Решим неравенство

$$2^n > 2n + 1 \tag{5}$$

на множестве натуральных чисел.

Решение. Непосредственная проверка показывает, что числа $n = 1$, $n = 2$ не являются решениями неравенства (5), а значения $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ являются решениями этого неравенства. Возникает предположение, что любое число $n \geqslant 3$ будет решением неравенства (5). Докажем это утверждение методом математической индукции.

При $n = 3$ неравенство верно: $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$. Предположим, что $2^k > 2k + 1$, и докажем, что тогда

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1.$$

В самом деле,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = (2k + 3) + (2k - 1) > 2k + 3$$

(мы использовали тот факт, что $2k - 1 > 0$ при любом натуральном значении k).

Следовательно, $2^n > 2n + 1$ при всех $n \geqslant 3$, т. е. множество решений неравенства (5) таково:

$$\{n \in \boldsymbol{N} | n \geqslant 3\}.$$

Пример 7. Докажем, что при $x > -1$ истинно неравенство

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx. \tag{6}$$

Решение. 1) При $n = 1$ имеем истинное неравенство $1 + x \geqslant 1 + x$. 2) Предположим, что неравенство $(1 + x)^k \geqslant 1 + kx$ истинно, и докажем, что тогда неравенство $(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x$ тоже истинно.

Так как $x > -1$, то $1 + x > 0$. И потому имеем:

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k \cdot (1 + x) \geqslant$$
$$\geqslant (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k + 1)x.$$

Итак, из истинности неравенства (6) при $n = k$ следует его истинность при $n = k + 1$. Значит, на основании принципа математической индукции истинность неравенства (6) установлена для всех натуральных n. Это неравенство называется *неравенством Бернулли* (в честь швейцарского математика XVII в. Якоба Бернулли).

Пример 8. Докажем неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}. \tag{7}$$

Решение. Выражение, содержащееся в левой части неравенства (7), представляет собой сумму дробей, знаменатели которых последовательно растут от 1 до $2^n - 1$. При $n = 1$ оно обращается

в 1. Но $1 > \frac{1}{2}$ — истинное неравенство, следовательно, неравенство (7) верно при $n = 1$.

Предположим, что

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} > \frac{k}{2},$$

и докажем, что тогда

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \frac{k+1}{2}.$$

В самом деле, имеем:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1}\right) + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right).$$

Итак, $S_{k+1} = S_k + A$, где $A = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}$.

Выражение A представляет собой сумму 2^k дробей, каждая из которых больше, чем $\frac{1}{2^{k+1}}$. Значит, $A > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$.

Поскольку $S_k > \frac{k}{2}$, $A > \frac{1}{2}$, то отсюда следует, что

$$S_{k+1} = S_k + A > \frac{k+1}{2}.$$

Истинность неравенства (7) доказана.

Упражнения

7. Найдите множество натуральных решений неравенства:

а) $2^n > n^2$; б) $2^n > n^3$.

8. Докажите следующие неравенства:

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$;

б) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n \geqslant 2$;

в) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, $n \geqslant 2$;

г) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n$;

д) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

е) $2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$, $n \geqslant 3$;

ж) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

з) $\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\ \ldots\ +\sqrt{c}}}}<\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ (n корней).

6. Применение метода математической индукции к задачам на делимость. Условимся вместо фразы «делится без остатка на» пользоваться знаком $\vdots$.

Пример 9. Докажем, что $(11^{n+2}+12^{2n+1})\vdots 133$.

Решение. При $n=1$ имеем:

$$11^3+12^3=(11+12)(11^2-11\cdot 12+12^2)=23\cdot 133.$$

Но $(23\cdot 133)\vdots 133$, а это означает истинность нашего утверждения при $n=1$.

Предположим, что это утверждение истинно при $n=k$, т. е. что

$$(11^{k+2}+12^{2k+1})\vdots 133.$$

Докажем, что тогда оно будет истинно и при $n=k+1$, т. е. что

$$(11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1})\vdots 133, \text{ или } 11^{k+3}+12^{2k+3}\vdots 133.$$

Действительно,

$$11^{k+3}+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11\cdot 11^{k+2}+11\cdot 12^{2k+1}+133\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}.$$

Полученная сумма делится на 133, т. е. утверждение истинно и при $n=k+1$.

По принципу математической индукции наше утверждение доказано для всех $n\in N$.

Метод математической индукции позволяет доказать одну знаменитую теорему, о которой мы сейчас расскажем. Заметим прежде, что для любого $n\in N$ число n^2-n четное. В самом деле, $n^2-n=n(n-1)$, а из двух подряд идущих натуральных чисел $n-1$, n одно обязательно четное; значит, и их произведение — четное число. Далее, нетрудно доказать, что $(n^3-n)\vdots 3$. В самом деле, $n^3-n=(n-1)n(n+1)$, а из трех подряд идущих натуральных чисел $n-1$, n, $n+1$ одно обязательно делится на 3; значит, и их произведение делится на 3.

Итак,

$$(n^2-n)\vdots 2,$$
$$(n^3-n)\vdots 3.$$

Возникает предположение, что $(n^m-n)\vdots m$. Но уже пример $m=4$, $n=3$ опровергает это утверждение: 3^4-3 не делится на 4. В то же время при $m=5$ утверждение снова справедливо: $(n^5-n)\vdots 5$.

В самом деле, имеем: $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$. Число n либо делится на 5 без остатка, либо дает один из остатков 1, 2, 3, 4. Соответственно n может иметь один из следующих пяти видов: 1) $n = 5k$; 2) $n = 5k+1$; 3) $n = 5k+2$; 4) $n = 5k+3$; 5) $n = 5k+4$.

В случае 1) имеем: $n \vdots 5$, а потому и $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$. В случае 2) имеем: $(n-1) \vdots 5$, а потому и $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$. В случае 3) имеем: $n^2+1 = (5k+2)^2+1 = 25k^2+20k+5$. Значит, $(n^2+1) \vdots 5$, а потому и $(n-1)n(n+1)\times(n^2+1) \vdots 5$. В случае 4) имеем: $n^2+1 = (5k+3)^2+1 = 25k^2+30k+10$. Значит, $(n^2+1) \vdots 5$, а потому и $(n-1)n\times(n+1)(n^2+1) \vdots 5$. В случае 5) имеем: $(n+1) \vdots 5$, а потому и $(n-1)n(n+1)(n^2+1) \vdots 5$.

Итак, методом полной индукции мы доказали, что $(n^5 - n) \vdots 5$ для всех $n \in N$.

Замечаем, что числа 2, 3, 5 простые. Это позволяет уточнить нашу гипотезу: *для любого* $n \in N$ *и любого простого числа* p $n^p - n$ *делится на* p. Это утверждение называется *малой теоремой Ферма*. Оно доказывается методом математической индукции с использованием формулы бинома Ньютона (см. «Элементы комбинаторики»).

Упражнения

9. Докажите:

а) $(6^{2^n} - 1) \vdots 35$;
б) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$;
в) $(2^{5^{n+3}} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$;
г) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 57$;
д) $(2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}) \vdots 37$;
е) $(3^{2^{n+3}} - 24n + 37) \vdots 64$;
ж) $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$.

7. Применение метода математической индукции для изучения свойств числовых последовательностей. Арифметическая и геометрическая прогрессии представляют собой простейшие примеры последовательностей, для изучения свойств которых с успехом применяется метод математической индукции. Прогрессии определяются рекуррентными соотношениями, т. е. соотношениями, позволяющими найти член последовательности по одному или нескольким ее предыдущим членам. Арифметическая прогрессия задается рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$, а геометрическая прогрессия — рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$ $(b_1 \neq 0, q \neq 0)$. Иными словами, само определение прогрессий дается с помощью перехода от n к $n+1$. Поэтому большинство формул, относящихся к прогрессиям, целесообразно выводить при помощи метода математической индукции.

Например, при выводе формулы n-го члена арифметической прогрессии замечаем, что $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$. Это позволяет предположить, что для любого натурального числа n истинно равенство $a_n = a_1 + d(n-1)$. Докажем его методом математической индукции.

При $n = 1$ оно истинно: $a_1 = a_1 + d \cdot (1 - 1)$. Предположим, что равенство истинно при $n = k$, т. е. что $a_k = a_1 + d \cdot (k - 1)$, и докажем, что тогда оно истинно и при $n = k + 1$, т. е. что $a_{k+1} = a_1 + dk$.

В самом деле, имеем: $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k - 1) + d = a_1 + dk$.

По принципу математической индукции равенство истинно для всех $n \in N$.

Аналогично выводится формула n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$ (вывод этой формулы мы оставляем читателю).

Покажем еще, как с помощью метода математической индукции выводится формула суммы S_n первых n членов геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots; S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Докажем, что при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}. \tag{8}$$

При $n = 1$ имеем: $S_1 = b_1$. С другой стороны, $\frac{b_1 (q^1 - 1)}{q - 1} = b_1$. Значит, при $n = 1$ равенство (8) истинно.

Предположим, что $S_k = \frac{b_1 (q^k - 1)}{q - 1}$, и докажем, что тогда справедливо равенство

$$S_{k+1} = \frac{b_1 (q^{k+1} - 1)}{q - 1}.$$

В самом деле, имеем:

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = \frac{b_1 (q^k - 1)}{q - 1} + b_1 q^k =$$

$$= \frac{b_1 q^k - b_1 + b_1 q^{k+1} - b_1 q^k}{q - 1} = \frac{b_1 (q^{k+1} - 1)}{q - 1}.$$

По принципу математической индукции заключаем, что равенство (8) истинно при всех $n \in N$.

Пример 10. Числовая последовательность определяется следующими условиями: $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. Найдем формулу n-го члена последовательности.

Решение. Пользуясь рекуррентным соотношением, находим: $a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 9$, $a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 17$. Замечаем, что $5 = 2^2 + 1$, $9 = 2^3 + 1$, $17 = 2^4 + 1$. Поэтому можно предположить, что $a_n = 2^n + 1$. Докажем это утверждение методом математической индукции.

При $n = 1$ утверждение справедливо. Предположим, что оно справедливо при любом $n \leqslant k$, и докажем, что тогда оно выполняется и при $n = k + 1$.

В самом деле, имеем:

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1.$$

Следовательно, наше утверждение верно при всех $n \in \boldsymbol{N}$ (мы применили здесь метод математической индукции в форме, указанной в теореме из п. 3).

Пример 11. Последовательность a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... определяется следующими условиями: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Докажем два свойства этой последовательности:

1) $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} + 1$;

2) $a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n$.

Решение. 1) Выпишем несколько первых членов последовательности. Имеем: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$, $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$. При $n = 1$ $a_{2n+2} = a_4 = 5 = a_1 + a_3 + 1$. Значит, при $n = 1$ утверждение 1) истинно.

Предположим, что оно истинно при $n = k$, т. е.

$$a_{2k+2} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1. \tag{9}$$

Докажем, что тогда оно верно и для $n = k + 1$, т. е.

$$a_{2k+4} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1.$$

В самом деле, воспользовавшись рекуррентным соотношением, получим: $a_{2k+4} = a_{2k+3} + a_{2k+2}$. Применив для a_{2k+2} формулу (9), получим:

$$a_{2k+4} = a_{2k+3} + (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + 1) = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} + a_{2k+3} + 1.$$

Значит, доказываемое равенство выполняется для всех $n \in \boldsymbol{N}$.

2) Для $n = 1$ утверждение справедливо: $a_1^2 - a_0 \cdot a_2 = (-1)^1$, так как $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Предположим, что

$$a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1} = (-1)^k,$$

и докажем, что тогда

$$a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2} = (-1)^{k+1}.$$

В самом деле,

$$a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2} = a_{k+1}^2 - a_k (a_{k+1} + a_k) =$$

$$= a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+1} - a_k^2 = a_{k+1} (a_{k+1} - a_k) - a_k^2 =$$

$$= a_{k+1} \cdot a_{k-1} - a_k^2 = -(a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Тем самым интересующее нас свойство доказано.

Последовательность, о которой шла речь в только что рассмотренном примере, называется *последовательностью Фибоначчи* (в честь итальянского математика XIII в. Леонардо Пизанского, писавшего под псевдонимом Фибоначчи).

Упражнения

10. Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи:

а) $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$;

б) $a_{n+9} = a_{n-1} \cdot a_8 + a_n \cdot a_9$;

в) $a_n \cdot a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

11. Напишите первые 11 членов последовательности Фибоначчи (от a_0 до a_{10}). Сравните a_3 с суммой $a_0 + a_1$, a_4 с суммой $a_0 + a_1 + a_2$, a_5 с суммой $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, ..., a_{10} с суммой $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_8$. Выскажите предположение о существовании определенного соотношения между a_{n+2} и суммой $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Докажите его методом математической индукции.

12. Числовая последовательность (a_n) определяется так: $a_0 = 0$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$. Докажите, что (a_n) — возрастающая последовательность.

13. Числовая последовательность (a_n) определяется так: $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$. Докажите, что $a_n = \frac{a + 2b}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{b - a}{3 \cdot 2^{n-1}}$.

14. Числовая последовательность (a_n) определяется так: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$. Докажите, что $a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 1)$.

15. Докажите, что если $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, то $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ при любом $n \in N$.

8. Применение метода математической индукции для изучения свойств конечных множеств. Начнем с решения задачи о числе подмножеств конечного множества X.

Если множество X не содержит ни одного элемента, т. е. $X = \varnothing$, то, очевидно, оно имеет только одно подмножество: $\varnothing$.

Если множество X состоит из одного элемента, т. е. $X = \{a\}$, то, очевидно, оно имеет два подмножества: $\varnothing$ и $\{a\}$.

Двухэлементное множество $X = \{a, b\}$ содержит четыре подмножества: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$. Трехэлементное множество $X = \{a, b, c\}$ имеет восемь подмножеств: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Обозначим число подмножеств n-элементного множества через $S(n)$. Из рассмотренных частных случаев следует, что $S(0) = 1$, $S(1) = 2$, $S(2) = 4$, $S(3) = 8$.

Замечаем, что $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$. Это наблюдение приводит нас к следующему индуктивному предположению: *число подмножеств n-элементного множества равно 2^n*. Докажем это утверждение методом математической индукции.

Выше мы уже убедились в истинности утверждения при $n = 1$ (а также при $n = 0, 2, 3$). Предположим, что утверждение справедливо при $n = k$, т. е. что любое k-элементное множество имеет 2^k подмножеств. Докажем, что тогда утверждение справедливо и для $n = k + 1$, т. е. что любое $(k + 1)$-элементное множество имеет 2^{k+1} подмножеств.

В самом деле, пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$. Это $(k + 1)$-элементное множество получается из k-элементного множества $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ добавлением одного элемента x_{k+1}. Любое из подмножеств множества X либо не содержит этого «добавленного» элемента x_{k+1}, либо содержит его. В первом случае оно является подмножеством множества Y, а по предположению индукции таких подмножеств имеется 2^k. Во втором случае, отбрасывая элемент x_{k+1}, снова получаем подмножество множества Y. Значит, число подмножеств второго вида равно числу подмножеств первого вида, т. е. равно 2^k. Но тогда общее число подмножеств множества X равно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$.

Итак, мы доказали, что равенство $S(n) = 2^n$ истинно при $n = 1$ и что из его истинности при $n = k$ следует, что оно верно и при $n = k + 1$. Отсюда по принципу математической индукции делаем вывод о справедливости нашего утверждения для любого $n \in N$.

Обозначим число элементов конечного множества X через $n(X)$. Если, например, $X = \{a, b, c, d\}$, то $n(X) = 4$. Введем еще понятие декартова произведения множеств и рассмотрим вопрос о числе элементов в декартовом произведении конечных множеств.

Пусть даны два множества X_1 и X_2. Рассмотрим множество, состоящее из всевозможных пар вида (a, b), где $a \in X_1$, $b \in X_2$. В каждой такой паре первая компонента — элемент множества X_1, а вторая — элемент множества X_2. Множество всех таких пар называется *декартовым произведением двух множеств* X_1 и X_2 и обозначается $X_1 \times X_2$. Заметим, что речь идет о так называемых *упорядоченных парах*, т. е., скажем, пары (a, b) и (b, a) считаются различными, если $a \neq b$ (подобно тому, как различны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, если $a \neq b$).

Например, если $X_1 = \{a, b, c\}$, $X_2 = \{1, 2\}$, то декартово произведение $X_1 \times X_2$ состоит из шести пар: $(a, 1)$, $(a, 2)$, $(b, 1)$, $(b, 2)$, $(c, 1)$, $(c, 2)$. Декартово же произведение $X_2 \times X_1$ тоже состоит из шести пар, компоненты которых идут в ином порядке: $(1, a)$, $(2, a)$, $(1, b)$, $(2, b)$, $(1, c)$, $(2, c)$. Таким образом, множества $X_1 \times X_2$ и $X_2 \times X_1$, вообще говоря, различны: $X_1 \times X_2 \neq X_2 \times X_1$. Принято считать, что если хотя бы одно из множеств X_1, X_2 пусто, то и их декартово произведение пусто: $X_1 \times \varnothing = \varnothing \times X_2 = \varnothing$.

Найдем число элементов декартова произведения $X \times Y$ в случае, когда X состоит из m элементов, а Y из k элементов, т. е. $n(X) = m$, $n(Y) = k$. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$,

$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Декартово произведение $X \times Y$ состоит из пар (x_i, y_j), где $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Эти пары можно расположить следующим образом:

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_k);$$
$$(x_2, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_2, y_k);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_m, y_1), (x_m, y_2), \ldots, (x_m, y_k).$$

Мы получили m строк по k пар в каждой строке. Отсюда следует, что общее число пар, входящих в $X \times Y$, равно mk, т. е. $n(X) \times n(Y)$. Иными словами, имеет место следующая формула:

$$n(X \times Y) = n(X)\, n(Y). \tag{10}$$

Пусть теперь даны s множеств $X_1, X_2, \ldots, X_s$. Рассмотрим такие упорядоченные наборы $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, что $x_k \in X_k$, $1 \leqslant k \leqslant s$. Множество, состоящее из всевозможных наборов α указанного вида, называется *декартовым произведением* s множеств $X_1, X_2, \ldots, X_s$ и обозначается $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s$.

Выше мы видели, что $n(X \times Y) = n(X)\, n(Y)$. С помощью метода математической индукции можно обобщить это равенство на случай декартова произведения любого конечного числа множеств.

Докажем, что если $X_1, X_2, \ldots, X_s$ — конечные множества, то

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s) = n(X_1)\, n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_s). \tag{11}$$

Выше мы уже проверили истинность формулы (11) при $s = 2$. Предположим, что формула справедлива при $s = k$, т. е. что выполняется равенство

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k) = n(X_1)\, n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k),$$

и докажем, что тогда формула (11) верна и при $s = k + 1$, т. е. что выполняется равенство

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = \\ = n(X_1)\, n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k)\, n(X_{k+1}).$$

В самом деле, рассмотрим произвольный элемент $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ множества $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}$ и положим $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Очевидно, что между множеством наборов вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ и множеством пар вида (α, x_{k+1}) имеется взаимно однозначное соответствие, т. е. наборов вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ столько же, сколько пар вида (α, x_{k+1}). Если множество всех α обозначить через A, то можно сказать, что интересующее нас множество $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}$ имеет столько же элементов, сколько множество $A \times X_{k+1}$, т. е.

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = n(A \times X_{k+1}).$$

Но по доказанному выше для двух множеств A и X_{k+1} имеем:

$$n(A \times X_{k+1}) = n(A)\, n(X_{k+1}),$$

а по построению A есть не что иное, как $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$. Воспользовавшись предположением индукции, получаем, что

$$n(A \times X_{k+1}) = n(A)\, n(X_{k+1}) = n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k) \times \\ \times n(X_{k+1}) = n(X_1)\, n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k)\, n(X_{k+1}).$$

Значит,

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k \times X_{k+1}) = \\ n(X_1)\, n(X_2) \cdot \ldots \cdot n(X_k)\, n(X_{k+1}).$$

Тем самым формула (11) доказана для всех натуральных чисел $s \geqslant 2$. Из нее, в частности, следует, что

$$n(\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{s \text{ раз}}) = (n(X))^s. \qquad (12)$$

Это значит, что s-я декартова степень m-элементного множества X содержит m^s элементов.

Доказанную формулу (11) можно наглядно изобразить с помощью чертежей особого вида, называемых «деревьями». Пусть, например, множество X состоит из четырех элементов: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а множество Y — из трех элементов: $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Возьмем на плоскости какую-нибудь точку O и проведем из нее четыре отрезка, соответствующие элементам множества X. Из конца каждого отрезка проведем по три отрезка, соответствующих элементам множества Y (рис. 2). Тогда каждой паре (x_k, y_l) соответствует начинающийся в точке O путь, состоящий из двух отрезков. Например, паре (x_2, y_3) соответствует путь, выделенный на рисунке 2. Множество таких путей находится во взаимно однозначном соответствии с множеством концов отрезков, проведенных на втором шаге. Число этих отрезков равно, очевидно, $4 \cdot 3 = 12$. Ясно, что если добавить еще множество M, состоящее из пяти элементов, то из каждого конца отрезка, проведенного на втором шаге, надо будет провести еще по пять отрезков, всего получится $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ путей. Это число равно числу элементов декартова произведения $X \times Y \times M$.

Упражнения

16. Докажите, что для всех $m \geqslant 2$ $n(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m) = n(X_1) + n(X_2) + \ldots + n(X_m)$, где $X_1, X_2, \ldots, X_m$ — попарно непересекающиеся (т.е. $X_i \cap X_j = \varnothing$, если $i \neq j$) конечные множества.

17. Докажите, что сумма внутренних углов любого выпуклого n-угольника равна $2d(n-2)$.

18. Докажите, что число диагоналей любого выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

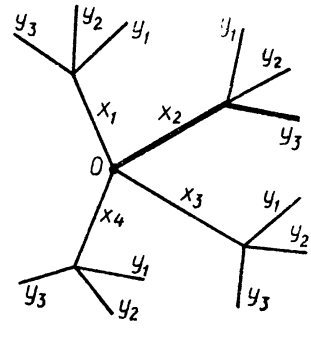


Рис. 2

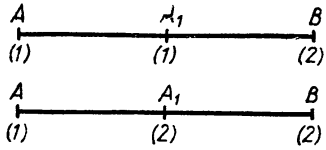


Рис. 3

9. Индукция в геометрии. Метод математической индукции находит применения и в геометрии. Приведем примеры.

Пример 12. Докажем, что n различных точек, лежащих на прямой, делят ее на $n + 1$ интервалов (из которых два интервала бесконечны).

Решение. При $n = 1$ это утверждение истинно, так как одна точка делит прямую на $1 + 1 = 2$ интервала. Предположим, что оно истинно при $n = k$, т. е. что любые k различных точек делят прямую на $k + 1$ интервалов. Возьмем теперь на прямой $k + 1$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$. Если отбросить точку A_{k+1}, останется k точек, делящих прямую на $k + 1$ интервалов. Точка A_{k+1} лежит на одном из этих интервалов и делит его в свою очередь на два интервала. Поэтому общее число интервалов, на которые делят прямую $k + 1$ точек, равно $(k + 1) + 1 = k + 2$.

Итак, наше утверждение истинно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ вытекает, что оно истинно и при $n = k + 1$. Тем самым доказано, что оно истинно при всех $n \in N$.

Пример 13*. Концы отрезка $[AB]$ занумерованы цифрами 1 и 2. Разобьем его на части точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и поставим в соответствие каждой из этих точек одну из цифр 1 или 2. Докажем, что число получившихся при делении отрезков, концы которых имеют различные номера, нечетно.

Решение. Для удобства назовем отрезки, концы которых имеют различные номера, разноцветными, а отрезки, номера концов которых одинаковы, — одноцветными. При $n = 1$ отрезок $[AB]$ разбит на два отрезка. Какой бы номер ни приписать точке A_1, делящей этот отрезок, получится один одноцветный и один разноцветный отрезок (рис. 3). В этом случае утверждение истинно. Предположим, что оно справедливо для случая $n = k$. Возьмем на отрезке $[AB]$ $k + 1$ точек: $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ и сопоставим этим точкам номера 1 и 2. Отбросив точку A_{k+1}, получим разбиение отрезка на $k + 1$ отрезков, причем по предположению индукции число разноцветных отрезков в этом случае нечетно. Разберем возможные случаи.

а) Точка A_{k+1} лежит на разноцветном отрезке. Тогда при любой нумерации точки A_{k+1} число разноцветных отрезков не изменится и потому останется нечетным.

б) Точка A_{k+1} лежит на одноцветном отрезке. Тогда, если точка A_{k+1} получит тот же номер, что и концы отрезка, число разноцветных отрезков не изменится (получается два одноцветных отрезка). Если же концы отрезка имели один номер, а точка A_{k+1} — другой, то добавятся два разноцветных отрезка, а значит, общее число разноцветных отрезков останется нечетным.

Итак, утверждение истинно при $n = 1$, и из его истинности при $n = k$ вытекает истинность и при $n = k + 1$. Значит, оно истинно при всех $n \in N$.

Пример 14. Пусть на плоскости даны n точек: $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Соединим некоторые пары этих точек линиями так, что никакие две линии не имеют общих точек, отличных от $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Эти линии задают разбиение плоскости на несколько областей. Назовем точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *вершинами* получившейся сети, линии — ее *ребрами*. Число ребер обозначим через r, число областей (включая бесконечную область) — через s, а число вершин — через n (например, для сети, изображенной на рис. 4, $n = 5$, $r = 7$, $s = 4$). Сеть называют *связной*, если из каждой ее точки можно перейти в любую другую, двигаясь лишь по ребрам сети (например, сеть на рис. 4 связна, а на рис. 5 несвязна). Найдем зависимость между n, r, s в случае связной сети.

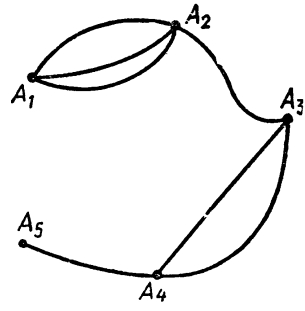


Рис. 4

Решение. Ясно, что при $n \geqslant 1$ из любой вершины связной сети выходит хотя бы одно ребро. Вершины, из которых выходит только одно ребро, назовем *концевыми* (вершина A_5 на рис. 4). Если сеть состоит из сторон n-угольника, то $r = n$, а $s = 2$ (контур многоугольника делит плоскость на две области). Поэтому выполняется равенство $n - r + s = 2$. Это равенство сохранится, если внутри многоугольника взять точку O и соединить ее со всеми вершинами (рис. 6) — получится $n + 1$ областей, $n + 1$ вершин и $2n$ ребер, а $(n + 1) - 2n + (n + 1) = 2$. Сохранится равенство и в случае, когда из некоторых вершин выходят «висячие» ребра (например, ребро A_4A_5 на рис. 4) — каждое такое ребро добавляет 1 и в число ребер, и в число вершин, не меняя числа областей, а потому не меняя и значения выражения $n - r + s$.

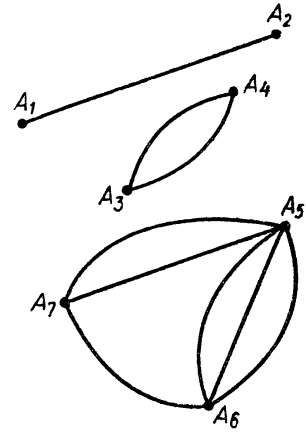


Рис. 5

Сделанные наблюдения приводят к гипотезе, что верно следующее утверждение: *для любой связной сети на плоскости имеет место равенство* $n - r + s = 2$. Это утверждение называется *теоремой Эйлера*.

Докажем эту теорему методом математической индукции, причем индукцию поведем по числу r ребер. Если $r = 1$, то

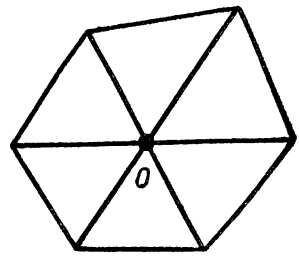


Рис. 6

имеем одно ребро, соединяющее точки A_1 и A_2. Это ребро не разбивает плоскость на части, и потому $s = 1$. Итак, $n = 2$, $r = 1$, $s = 1$, и потому $n - r + s = 2$. Значит, для этого случая теорема справедлива.

Пусть теорема Эйлера уже доказана при $r = k$. Возьмем сеть, содержащую $k + 1$ ребер. Пусть для нее число вершин n и число областей s. Мы хотим доказать, что $n - (k + 1) + s = 2$. Разберем два возможных случая.

а) В сети есть замкнутый путь, выходящий из некоторой точки и возвращающийся в нее. В этом случае сотрем одно из ребер, входящих в этот путь. Число вершин не изменится, а число ребер и число областей уменьшится на 1 (стертое ребро разделяло две области, которые теперь соединились в одну). Значит, получится связная сеть, состоящая из n вершин, k ребер и $s-1$ областей. По предположению индукции $n - k + (s - 1) = 2$. Но это значит, что $n - (k + 1) + s = 2$, т. е. что теорема Эйлера верна и для первоначально взятой сети.

б) В сети нет замкнутых путей (такие сети называют *деревьями*). Легко доказать, что в такой сети есть хотя бы одна концевая точка (до нее можно дойти, выйдя из какой-нибудь вершины сети и двигаясь по ее ребрам; из-за того, что в сети нет замкнутых путей, мы никогда не вернемся в уже пройденную точку и рано или поздно попадем в концевую точку). Кроме того, для такой сети $s = 1$, так как дерево, очевидно, не разбивает плоскость на части.

Отбросим концевую точку и выходящее из нее ребро. Получим связную сеть, содержащую $n - 1$ вершин, k ребер и одну область. По предположению индукции $n - 1 - k + 1 = 2$. Значит, $n - (k + 1) + 1 = 2$, т. е. и в этом случае утверждение истинно, поскольку $s = 1$.

Итак, теорема Эйлера истинна для сетей, состоящих из одного ребра, а из ее истинности для сети, состоящей из k ребер, вытекает, что она истинна и для сети, содержащей $k + 1$ ребер. Значит, в силу принципа математической индукции она истинна для всех сетей.

Упражнения

19. Пусть на отрезке $[AB]$ взяты n точек и эти точки, равно как и концы отрезка, занумерованы цифрами 1 и 2, причем точка A получила номер 1, а точка B — номер 2. Обозначим через r число отрезков, левый конец которых получил номер 1, а правый — номер 2, а через s — число отрезков, у которых левый конец получил номер 2, а правый — номер 1 (считаем, что точка A лежит слева от точки B). Докажите, что $r - s = 1$.

20. На плоскости проведены n прямых. Докажите, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно покрасить белой и черной краской так, что соседние области (т. е. области, имеющие хотя бы одно общее ребро) будут иметь различный цвет (раскраску с таким свойством называют *правильной*).

21. На плоскости даны n окружностей. Докажите, что области, на которые они разбивают плоскость, можно правильно раскрасить в белый и черный цвет.

22. Докажите, что карту можно правильно раскрасить двумя красками в том и только в том случае, когда в каждой вершине сходится четное число ребер.

ОТВЕТЫ

1. $S_{316} = 158$: $S_{327} = -164$. **2.** Нет.

4. а) $\frac{n}{2n+1}$; б) $\frac{n}{3n+1}$; в) $(-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

5. а) $\frac{1}{n+1}$; б) $\frac{n+2}{2n+2}$. **7.** а) $n \geqslant 5$; б) $n \geqslant 10$.

11. $a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n - 1$.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. Комбинаторные задачи. На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определенном порядке и т. д. Например, мастеру приходится распределять различные виды работ между рабочими, агроному — размещать сельскохозяйственные культуры на нескольких полях, офицеру — выбирать из солдат взвода наряд и т. д. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют *комбинаторными задачами*. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называют *комбинаторикой*. Комбинаторику можно рассматривать как часть теории конечных множеств — любую комбинаторную задачу можно свести к задаче о конечных множествах и их отображениях.

Различают несколько уровней решения комбинаторных задач. Начальным уровнем является поиск хотя бы одного расположения объектов, обладающего заданными свойствами (например, отыскание такого расположения десяти точек на пяти отрезках, при котором на каждом отрезке лежит по четыре точки, или такого расположения восьми ферзей на шахматной доске, при котором они не бьют друг друга). Если комбинаторная задача имеет несколько решений, то возникает вопрос о подсчете числа таких решений, об описании всех решений данной задачи. Наконец, часто бывает, что различные решения данной комбинаторной задачи отличаются друг от друга некоторыми параметрами. В этом случае возникает проблема отыскания оптимального варианта решения такой задачи.

Здесь мы ограничиваемся лишь рассмотрением вопроса о подсчете числа решений комбинаторных задач.

2. Правило произведения. Для подсчета числа решений комбинаторных задач существуют различные формулы — о них речь пойдет в дальнейших пунктах. Все эти формулы основаны в конечном итоге на двух простых правилах, которые называются правилами произведения и суммы. В настоящем пункте речь пойдет о правиле произведения. Чтобы познакомиться с ним, рассмотрим следующую задачу.

Пример 1. В столовой имеется 4 первых блюда и 6 вторых. Сколькими способами можно составить из них обед?

Р е ш е н и е. Обозначим первые блюда цифрами 1, 2, 3, 4, а вторые — буквами $а$, $б$, $в$, $г$, $д$, $е$. Тогда любой обед «шифруется» комбинацией цифры и буквы. Такая комбинация является элементом декартова произведения $X \times Y$ множеств $X = \{1, 2, 3, 4\}$ и $Y = \{а, б, в, г, д, е\}$. Но в п. 8 (с. 22) было доказано, что $n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y)$. Так как $n(X) = Y$, $n(Y) = 6$, то $n(X \times Y) = 4 \cdot 6 = 24$. Значит, существуют 24 возможных выбора обеда.

В общем виде задача формулируется так:

Даны два множества X и Y, состоящие соответственно из k и m элементов. Сколькими способами можно составить пару (x, y), такую, что $x \in X$, $y \in Y$?

Как и в разобранном выше примере, видим, что множество таких пар является декартовым произведением множеств X и Y. Значит, число таких пар является числом элементов этого декартова произведения и по формуле (10) (с. 22) равно km.

Тем самым доказано следующее утверждение:

Если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y — m способами, то пару (x, y) можно выбрать km способами.

Это правило носит название *правила произведения*. С помощью метода математической индукции оно обобщается на случай, когда выбирается не пара, а тройка, четверка элементов и т. д.:

Если элемент x_1 можно выбрать k_1 способами, элемент x_2 — k_2 способами, ..., элемент x_m — k_m способами, то набор $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ можно выбрать $k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_m$ способами.

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой (11) из п. 8 (с. 22).

Поскольку в дальнейшем нам будут часто встречаться декартовы произведения и их элементы, введем особое название. Элемент декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ назовем *кортежем длины k, составленным из элементов множеств X_1, X_2, ..., X_k*. Может случиться, что все эти множества равны X; тогда $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется *кортежем длины k, составленным из элементов множества X*. Элемент x_i, $(1 \leqslant i \leqslant k)$ называют *i-й компонентой* или *i-й координатой* кортежа $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Слово «кортеж» в переводе на русский означает «торжественное шествие» (говорят «свадебный кортеж», «кортеж автомашин»). Примерами кортежей могут служить слова (кортежи, составленные из букв алфавита), десятичные записи чисел (кортежи, составленные из цифр) и т. д.

Два кортежа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ считают *равными*, если они имеют одинаковую длину, причем их компоненты, имеющие одинаковые номера, равны. Итак, если $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, то $\alpha = \beta$ в том и только в том случае, если $k = m$ и $x_i = y_i$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Например, если $\alpha = (2^2, 3^2, 4^2)$, $\beta = (\sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256})$, то $\alpha = \beta$, так как $2^2 = \sqrt{16}$, $3^2 = \sqrt{81}$, $4^2 = \sqrt{256}$. Кортежи (a, b, c) и (a, b, c, a) не равны,

так как имеют различную длину. Кортежи (a, b, c) и (b, a, c) имеют одинаковую длину и состоят из одних и тех же элементов, но они не равны, так как порядок их компонент различен.

Подчеркнем еще раз отличия понятия кортежа от понятия множества:

а) *в множестве порядок элементов не играет роли, а кортежи, отличающиеся порядком элементов, различны даже в том случае, когда они имеют один и тот же состав;*

б) *в множестве все элементы различны, а в кортеже компоненты могут повторяться.*

Упражнение

1. В библиотеке имеется 10 различных книг А. С. Пушкина, 8 различных книг И. С. Тургенева и 7 различных книг Н. В. Гоголя. Сколькими способами ученик может сделать выбор трех книг так, чтобы среди них была одна книга А. С. Пушкина, одна книга И. С. Тургенева и одна книга Н. В. Гоголя?

3. Размещения с повторениями. Кортежи длины k, составленные из m-элементного множества X, называют также *размещениями с повторениями из m элементов по k*. Их число обозначают $\overline{A}_m^k$ (A — первая буква французского слова arrangement — размещение)[1].

Из формулы (12) на стр. 23 следует, что

$$\overline{A}_m^k = m^k. \qquad (1)$$

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить 33^2 «слова» длиной 2 (аа, аб, ав, ..., яю, яя), 33^3 «слова» длиной 3 (ааа, ааб, ..., яяю, яяя), 33^4 «слова» длиной 4 и т. д. Точно так же из 10 цифр можно составить 10^2 двузначных номеров (00, 01, ..., 99), 10^3 трехзначных номеров и т. д.

Формула (1) позволяет решать различные задачи комбинаторики.

Пример 2.. Имеется 5 различных стульев и 7 рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев?

Решение. Поскольку стулья различны, то мы можем расположить их в определенном порядке. Тогда каждый способ обивки есть по существу кортеж длины 5, составленный из элементов данного множества цветов ткани, содержащего 7 элементов. Значит, всего способов обивки столько, сколько имеется таких кортежей, т. е. размещений с повторениями из 7 элементов по 5. Воспользовавшись формулой (1), находим: $\overline{A}_7^5 = 7^5 = 16\,807$.

Пример 3. 15 занумерованных биллиардных шаров разложены по шести лузам. Сколькими способами это можно сделать?

---

[1] Черта поставлена, чтобы отличить размещения с повторениями от размещений без повторений, которые мы изучим позднее (их число обозначается A_m^k).

Р е ш е н и е. Поставим каждому числу от 1 до 15 в соответствие номер лузы, в которую положен шар. Получим кортеж длины 15, составленный из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (номеров луз). Число таких кортежей равно $\bar{A}_6^{15} = 6^{15}$.

П р и м е р 4. В СССР для автомобильных номеров используются 10 цифр и 28 букв (кроме ё, й, ь, ъ, ы). Каждый номер состоит из трех букв и четырех цифр (кроме сочетания цифр 00—00). Какое максимальное число машин может получить номера при такой системе?

Р е ш е н и е. Сначала осуществим выбор четырех цифр. Каждый такой комплект цифр есть кортеж длины 4, составленный из элементов данного 10-элементного множества цифр, а всего таких кортежей 10^4. Если исключить кортеж 0000, останется $10^4 - 1$ кортежей. Аналогично выбор трех букв из 28 можно осуществить числом способов, равным 28^3. Пусть α — комплект цифр, β — комплект букв. Тогда каждый номер есть по существу пара (α, β), а число способов выбора такой пары находится по правилу произведения (см. п. 2). Использовав это правило, получим $(10^4 - 1) \cdot 28^3 = 219\,498\,048$ номеров машин.

Упражнения

2. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

3. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить ящики по этажам?

4. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

4. Число отображений n-элементного множества в m-элементное множество. Мы уже говорили о том, что выведенная выше формула (1) позволяет решать различные задачи комбинаторики. В настоящем пункте мы приведем еще один пример, подтверждающий эту мысль.

Чтобы задать кортеж длины k из элементов множества Y, достаточно указать отображение f множества $N_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ натурального ряда чисел в множество Y. Если обозначить $f(1)$ через y_1, $f(2)$ через y_2, ..., $f(k)$ через y_k, то получим кортеж $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами кортежей длины k из элементов множества Y и множеством отображений $f : N_k \to Y$. Поэтому число таких кортежей равно числу отображений множества N_k в множество Y. Очевидно, таким же будет число отображений в Y любого k-элементного множества. Если Y содержит m элементов, то число кортежей равно $\bar{A}_m^k = m^k$. Отсюда следует, что *число отображений k-элементного множества X в m-элементное множество Y равно m^k.*

Этот результат позволяет найти число подмножеств n-элементного множества X. В самом деле, возьмем два числа 0 и 1. Каждому подмножеству множества X соответствует отображение φ множества X в множество $\{0, 1\}$, при котором элементы из A отображаются в 1, а остальные элементы — в 0. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между подмножествами множества X и отображениями этого множества в множество $\{0, 1\}$. Но число этих отобра-

жений равно 2^n, где n — число элементов множества X. Значит, и *число подмножеств n-элементного множества X равно 2^n.*

Выше (см. п. 8, с. 21) мы получили этот результат с помощью метода математической индукции.

Упражнения

5. Найдите число распределений k различных предметов по m различным ящикам (некоторые ящики могут оказаться пустыми).

5. Обобщенное правило произведения. Размещения без повторений. Иногда бывает так, что возможности выбора второй компоненты кортежа после произведенного выбора первой компоненты зависят от того, какой элемент x_1 выбран. Например, на выбираемые элементы может быть наложено условие, что рядом стоящие элементы должны быть различны. Если элементы выбираются из множества $X = \{a, b, c, d\}$, то после выбора элемента a можно выбирать один из элементов b, c, d, а после выбора элемента b — один из элементов a, c, d. Однако в обоих случаях после выбора первой компоненты кортежа имеются три возможности выбора второй компоненты.

Обобщенное правило произведения формулируется следующим образом:

Пусть надо выбрать кортеж длины n и пусть первую компоненту этого кортежа можно выбрать m_1 способами, вторую компоненту при любом выборе первой компоненты — m_2 способами, третью при любом выборе первых двух — m_3 способами, ..., n-ю компоненту при любом выборе предыдущих компонент — m_n способами. Тогда существует $m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ способов выбора кортежа.

Справедливость этого утверждения для всех $n \geqslant 2$ доказывается методом математической индукции аналогично тому, как доказывается правило произведения.

Пример 5. Из 33 букв русского алфавита составляются слова из 4 букв так, что соседние буквы в слове различны. Сколько таких слов можно составить (допускаются и слова, не имеющие в русском языке смысла)?

Решение. Первую букву можно выбрать 33 способами. После выбора первой буквы вторую можно выбрать лишь 32 способами, так как повторять первую букву нельзя. Третья буква должна быть отлична от второй (хотя может совпадать с первой). Поэтому ее можно выбрать тоже 32 способами, равно как и четвертую. Всего по обобщенному правилу произведения получаем, что общее число выбора равно $33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 1\,081\,344$.

Во многих случаях возникает задача об отыскании числа кортежей длины k из элементов данного m-элементного множества, в которых нет повторяющихся элементов. Образование таких кортежей можно наглядно представить себе следующим образом. Положим элементы множества X в мешок и будем извлекать их из него один за другим, записывать извлеченный элемент и отклады-

вать его в сторону. После того как мы сделаем k извлечений, получим кортеж длины k, состоящий из элементов множества X (точнее говоря, из их названий), причем в нем не будет повторяющихся элементов. Кортеж будет состоять из k различных элементов, расположенных в определенном порядке. Такие кортежи называют *упорядоченными множествами* (напомним, что в множестве нет двух одинаковых элементов, тогда как в произвольном кортеже могут быть одинаковые элементы).

Итак, множество называется *упорядоченным*, если его элементы расположены в определенном порядке. Одно и то же множество можно упорядочить различными способами (например, множество школьников данного класса можно упорядочить по возрасту, росту, весу, алфавиту и даже по столь случайному признаку, как время его прихода в школу 1 сентября).

Если задано m-элементное множество X и $k \leqslant m$, то можно составить различные упорядоченные k-элементные множества, в которые входят лишь элементы множества X. Например, из элементов множества $\{a, b, c, d\}$ можно составить 12 упорядоченных подмножеств, по два элемента в каждом: (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c).

Упорядоченные k-элементные подмножества данного множества X, содержащего m элементов, называют *размещениями без повторений из m элементов по k*. Их число обозначают A_m^k. Найдем формулу для вычисления A_m^k.

Пусть множество X содержит m элементов. Упорядоченное k-элементное подмножество можно получить, выбирая из X поочередно элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$. В качестве первого элемента x_1 можно выбрать любой из m элементов множества X, поэтому такой выбор может быть произведен m способами. После того как первый элемент выбран, второй элемент можно выбрать лишь $m - 1$ способами (можно взять любой элемент, исключая уже выбранный). После выбора первых двух элементов остаются $m - 2$ возможности выбрать третий элемент и т. д. Последний, k-й элемент можно выбрать $m - k + 1$ способами — ведь до него уже выбрано $k - 1$ элементов, а потому осталось лишь $m - (k - 1) = m - k + 1$ элементов.

По обобщенному правилу произведения получаем, что число упорядоченных k-элементных подмножеств множества X, содержащего m элементов, равно произведению чисел m, $m - 1$, $m - 2$, ..., $m - k + 1$, т. е. $m(m - 1)(m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - k + 1)$. Мы доказали, таким образом, что

$$A_m^k = m(m - 1)(m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - k + 1). \qquad (2)$$

Выше (см. сноску на с. 13) мы отмечали, что произведение первых n натуральных чисел, т. е. $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, называют *$n$-факториалом* и обозначают $n!$. Произведение $m(m - 1) \cdot \ldots \cdot (m - k + 1)$ можно записать в виде дроби

$$\frac{m(m-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(m-k+1)(m-k)\cdot\ \ldots\ \cdot 2\cdot 1}{(m-k)\cdot\ \ldots\ \cdot 2\cdot 1},$$

т. е. в виде $\frac{m!}{(m-k)!}$. Таким образом получаем, что

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}. \qquad (3)$$

В частности, при $k = 0$ получаем: $A_m^0 = \frac{m!}{m!} = 1$.

Пример 5. Сколькими способами из 40 учеников класса можно выделить актив в следующем составе: староста, комсорг и редактор стенгазеты?

Решение. Здесь речь идет о выделении упорядоченных трехэлементных подмножеств данного множества, содержащего 40 элементов, т. е. о размещениях без повторений из 40 элементов по 3. Воспользовавшись формулой (2), находим:

$$A_{40}^3 = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59\,280.$$

Пример 6. В шахматном турнире участвуют 5 школьников и 15 студентов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые в турнире школьниками, если никакие два участника не набрали одинаковое количество очков?

Решение. Всего имеется 20 мест, из которых школьникам принадлежит 5. Значит, речь идет о выделении пятиэлементных подмножеств данного множества, содержащего 20 элементов. Пусть, например, школьникам достались места 1-е, 5-е, 6-е, 9-е и 12-е. При этом существен и тот порядок, в котором школьники *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* займут эти места. Таким образом, речь идет о выделении упорядоченных пятиэлементных подмножеств данного множества, состоящего из 20 элементов, т. е. о размещениях без повторений из 20 элементов по 5. Воспользовавшись формулой (2), получаем:

$$A_{20}^5 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480.$$

Пример 7. В классе 20 мальчиков и 20 девочек. Для участия в концерте нужно выделить танцевальный дуэт, дуэт певцов и гимнастический дуэт (каждый из которых состоит из мальчика и девочки). Сколькими способами это можно сделать (при условии, что все умеют петь, танцевать и выполнять гимнастические упражнения)?

Решение. Выделить из 20 мальчиков одного танцора, одного певца и одного гимнаста можно столькими способами, сколько существует упорядоченных трехэлементных подмножеств в данном множестве, содержащем 20 элементов, т. е. A_{20}^3 способами. Точно так же получаем, что имеется A_{20}^3 способов выделить из множества девочек танцовщицу, певицу и гимнастку. По правилу произведения находим, что число способов выделить дуэт танцоров, дуэт певцов и дуэт гимнастов равно:

$$A_{20}^3 \cdot A_{20}^3 = (20 \cdot 19 \cdot 18)^2 = 46\,785\,600.$$

Упражнения

6. Сколькими способами могут быть присуждены 1-я, 2-я и 3-я премии трем лицам, если число соревнующихся равно 10?

7. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг (три горизонтальные цветные полосы равной ширины), если имеется материал пяти различных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной (красный — один из имеющихся цветов).

8. Сколько нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если любую из них в каждом числе использовать не более одного раза?

9. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа, причем числа, в которых есть цифры 2, 4, 5 одновременно, не содержат одинаковых цифр. Сколько всего таких чисел можно составить?

6. Перестановки без повторений. Пусть множество X содержит m элементов. Рассмотрим его различные упорядочивания. Получаемые при этом упорядоченные множества отличаются друг от друга лишь порядком входящих в них элементов и называются *перестановками без повторений из m элементов*. Число перестановок без повторений обозначается P_m (от французского слова permutation — перестановка). Например, $P_3 = 6$, так как из трех элементов a, b, c можно составить 6 перестановок:

$$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a).$$

Чтобы найти выражение для P_m, заметим, что перестановка без повторений из m элементов — это то же самое, что размещение без повторений из m элементов по m. Поэтому для отыскания P_m достаточно положить в формуле (2) из предыдущего пункта $k = m$. Получим:

$$P_m = m\,(m-1)\,(m-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!. \qquad (4)$$

Если для вычисления P_m воспользоваться формулой (2), то получим:

$$P_m = A_m^m = \frac{m!}{0!} \qquad (5)$$

Сравнивая равенства (4) и (5), приходим к выводу, что $0! = 1$. На первый взгляд это равенство кажется парадоксальным. Но для всех $m \geqslant 2$ справедливо равенство $m! = (m-1)! \cdot m$. Если потребовать, чтобы это равенство было справедливо и при $m = 1$, то получим: $1! = 0! \cdot 1$, откуда вновь следует, что естественно положить $0! = 1$.

Пример 8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, не кратные пяти и не содержащие одинаковых цифр. Сколько существует таких чисел?

Решение. Из пяти различных цифр можно составить P_5 пятизначных чисел. По условию задачи эти числа не должны быть

кратны пяти, т. е. последней цифрой числа не должна быть цифра 5. Если цифру 5 записать на последнем месте, то остальные цифры могут распределиться по разрядам числа P_4 способами. Таким образом, всем условиям задачи удовлетворяют $P_5 - P_4$ чисел. Воспользовавшись формулой (4) для числа перестановок, находим:

$$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

Пример 9. 30 книг — 27 книг различных авторов и трехтомник одного автора — помещены на одной книжной полке. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

Решение. Будем считать три книги трехтомника за одну книгу. Тогда получим 28 книг, которые можно расположить на полке P_{28} способами. Учтем, что 3 книги одного автора можно переставлять друг с другом P_3 способами. Воспользовавшись правилом произведения, находим следующее число способов расстановки книг при указанном условии:

$$P_3 \cdot P_{28} = 3! \cdot 28!.$$

Упражнения

10. В турнире участвуют 6 человек. Сколькими способами могут распределиться места между ними?

11. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом?

12. Сколько различных перестановок можно составить из букв слов «кортеж», «гипербола», «треугольник»?

7. Сочетания без повторений. Решим следующую задачу.

Пример 10. В классе 40 учеников. Сколькими способами можно выделить из них трех человек для участия в праздничной демонстрации?

Решение. Если вызвать трех учеников *А*, *Б*, *В* одного за другим и построить их в шеренгу в том порядке, как их вызвали, то получим, очевидно, размещение без повторений из 40 по 3. Число таких размещений равно $A_{40}^3 = 40 \cdot 39 \cdot 38$. Но при этом один и тот же состав участников демонстрации будет получаться различными способами. Например, размещения (*А*, *Б*, *В*) и (*В*, *Б*, *А*) дают один и тот же состав участников. Иными словами, переставляя выбранных трех человек в любом порядке, мы будем получать различные размещения, но один и тот же состав участников демонстрации. Так как трех человек можно переставлять $3! = 6$ способами, то число различных составов в $3!$ раз меньше числа размещений. Поэтому число способов выделения трех участников демонстрации из 40 человек равно:

$$\frac{A_{40}^3}{3!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9880.$$

С точки зрения математики решенная задача является частным случаем следующей общей задачи:

Сколькими способами можно из данного m-элементного множества выбрать подмножество, содержащее k элементов (в нашем примере было $m = 40$, $k = 3$). При этом выбираемые подмножества не упорядочены. Такие неупорядоченные подмножества называют *сочетаниями без повторений из m элементов по k*, а их число обозначают C_m^k (от французского слова combinaison — сочетание). Например, из элементов пятиэлементного множества $X = \{a, b, c, d, e\}$ можно составить следующие двухэлементные подмножества: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{e, d\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$. Число этих подмножеств равно 10. Значит, $C_5^2 = 10$. Отметим, что $C_m^0 = 1$ — каждое множество X имеет лишь одно подмножество, не содержащее ни одного элемента, а именно пустое множество. Далее, $C_m^1 = m$ — в множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, состоящем из m элементов, содержится m одноэлементных подмножеств, т. е. подмножеств вида $\{x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Выведем формулу, выражающую C_m^k через m и k. Пусть из элементов множества X, состоящего из m элементов, составлены все подмножества, содержащие по k элементов. Упорядочим всеми способами каждое из этих подмножеств. Мы получим, и притом лишь по одному разу, все упорядоченные подмножества множества X, состоящие из k элементов. Так как X содержит m элементов, то число таких подмножеств равно A_m^k. Но число k-элементных подмножеств множества X равно C_m^k, а каждое из них можно упорядочить $P_k = k!$ способами. Значит, имеет место равенство $A_m^k = k! \cdot C_m^k$. Из него вытекает, что $C_m^k = \frac{A_m^k}{k!}$. Воспользовавшись для A_m^k его выражением по формуле (3), получим:

$$C_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}. \qquad (6)$$

Пример 11. Из 20 сотрудников лаборатории 5 человек должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов отъезжающей группы, если заведующий лабораторией и два ведущих инженера одновременно уезжать не должны?

Решение. Всего имеется C_{20}^5 всевозможных вариантов выбора пяти человек из данных двадцати. Но из этого числа нам нужно отбросить те варианты, при которых заведующий лабораторией и два ведущих инженера входят в группу отъезжающих. Если указанные три человека включены в группу из пяти человек, то на оставшиеся два места мы должны осуществить выбор из оставшихся 17 человек, а это возможно C_{17}^2 способами. Таким образом, различных составов группы отъезжающих в командировку будет $C_{20}^5 - C_{17}^2$. Воспользовавшись формулой (6), произведем вычисления:

$$C_{20}^{5} - C_{17}^{2} = \frac{20!}{5!15!} - \frac{17!}{2!15!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{17 \cdot 16}{1 \cdot 2} = 15\,368.$$

Пример 12. Сколькими способами можно расставить на 32 черных полях шахматной доски 12 белых и 12 черных шашек?

Решение. Поля для белых шашек можно выбрать C_{32}^{12} способами. После этого остается 20 полей, на которых можно C_{20}^{12} способами выбрать поля для черных шашек. Всего по правилу произведения получаем:

$$C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12} = \frac{32!}{12!20!} \cdot \frac{20!}{12!8!} = \frac{32!}{12!12!8!}.$$

Упражнения

13. Из отряда солдат в 50 человек, среди которых есть рядовой Иванов, назначаются в караул 4 человека. Сколькими различными способами может быть составлен караул? В скольких случаях в число караульных попадает рядовой Иванов?

14. Сколько различных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд может содержать от трех до десяти звуков?

15. Тридцать человек разбиты на три группы, по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

8. Комбинаторные задачи геометрического содержания. Существует много комбинаторных задач, имеющих геометрическое содержание, например задачи на подсчет числа диагоналей многоугольника, числа точек пересечения нескольких прямых или окружностей и т. д. Приведем пример решения задачи такого типа.

Пример 13. Найдем число точек пересечения диагоналей, лежащих внутри выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке ($n \geqslant 4$).

Решение. Если взять любые 4 вершины многоугольника, то через них можно провести либо 3 (рис. 1), либо 4 (рис. 2), либо 5 (рис. 3), либо 6 (рис. 4) диагоналей. В первом случае из трех диаго-

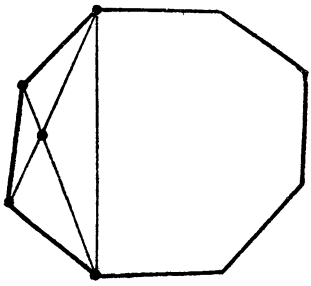


Рис. 1

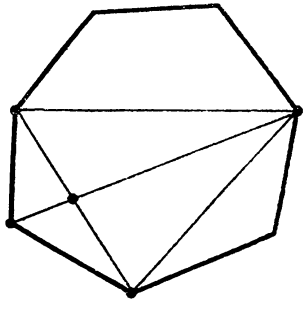


Рис. 2

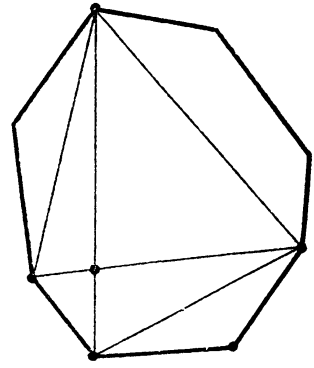


Рис. 3

налей внутри многоугольника пересекаются две и имеют одну точку пересечения. В остальных случаях четыре диагонали могут иметь более одной точки пересечения, но из этих точек лишь одна лежит внутри многоугольника. Значит, любая внутренняя точка пересечения диагоналей однозначно определяется выбором четверки вершин, причем порядок вершин роли не играет. Но число таких четверок (а тем самым и внутренних точек пересечения диагоналей) равно C_n^4.

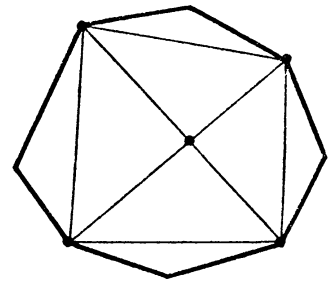


Рис. 4

Упражнения

16. На плоскости проведено n прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

17. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом 15-угольнике; n-угольнике?

18. На одной из параллельных прямых отмечено 10 точек, а на другой — 7 точек. Каждая точка одной прямой соединяется отрезком с каждой точкой другой прямой. Найдите число точек пересечения полученных отрезков, если известно, что никакие три отрезка не имеют общей точки (общие точки на концах отрезков не считаются).

9. Перестановки с повторениями. Сосчитаем, сколько различных «слов» (т. е. не обязательно имеющих смысл) можно получить, переставляя буквы слова «кишмиш». Вообще говоря, 6 букв можно переставить друг с другом $6! = 720$ способами. Но дело в том, что в слове «кишмиш» некоторые буквы повторяются дважды и при перестановке, например, второй и пятой букв слово не меняется. Поэтому сосчитаем, сколькими способами можно переставить в этом слове буквы так, чтобы оно не изменилось. Легко видеть, что число таких способов равно четырем: можно оставить все буквы на месте, либо переставить друг с другом две буквы «и», либо поменять местами буквы «ш», либо поменять местами и две буквы «и», и две буквы «ш». Значит, число различных перестановок букв слова «кишмиш» в 4 раза меньше, чем 720, т. е. равно $720 : 4 = 180$.

Похожим образом решается более общая задача: найти число различных кортежей, которые можно получить, переставляя компоненты данного кортежа. Чтобы уточнить постановку задачи, введем понятие состава кортежа.

Пусть α — кортеж длины n, составленный из элементов m-элементного множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Каждому числу k, $1 \leqslant k \leqslant m$, соответствует число n_k, показывающее, сколько раз элемент x_k встречается среди компонент кортежа α. Выписывая

по порядку эти числа, получаем новый кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, который и называют *составом кортежа* α. Например, если $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а $\alpha = (x_1, x_3, x_1, x_4, x_3, x_1)$, то кортеж α имеет состав (3, 0, 2, 1).

Два кортежа, имеющие один и тот же состав, могут отличаться друг от друга лишь порядком компонент. Их называют *перестановками с повторениями данного состава*. Найдем формулу для отыскания числа перестановок с повторениями данного состава.

Прежде чем решать эту задачу в общем виде, рассмотрим частный случай — найдем число перестановок с повторениями из букв a, a, a, b, b, c, c. Сначала перенумеруем эти буквы: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$. Так как после нумерации все буквы стали различны (мы можем теперь отличить a_1 от a_2), то из них можно составить 7! перестановок, где $7 = 3 + 2 + 2$. Если стереть в каждой из этих перестановок значки при буквах, то получатся перестановки с повторениями из букв a, a, a, b, b, c, c. Например, из перестановки $(a_1, b_1, c_2, c_1, a_3, b_2, a_2)$ получим (a, b, c, c, a, b, a). При этом одна и та же перестановка с повторениями получается несколько раз. Например, перестановка с повторениями (a, a, a, b, b, c, c) получается из всех перестановок букв $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$, в которых на первых трех местах стоят буквы a_1, a_2, a_3 (в любом порядке), на четвертом и пятом — буквы b_1 и b_2 (в любом порядке), а шестое и седьмое места занимают буквы c_1 и c_2. Но буквы a_1, a_2, a_3 можно переставлять 3! способами, буквы b_1, b_2 — 2! способами и буквы c_1, c_2 — 2! способами. Поскольку эти способы можно произвольно комбинировать друг с другом, то получаем, что (a, a, a, b, b, c, c) получается из $3! \cdot 2! \cdot 2!$ перестановок букв $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$. Столькими же способами может получиться любая другая перестановка с повторениями букв a, a, a, b, b, c, c. Значит, число различных перестановок с повторениями в $3! \cdot 2! \cdot 2!$ раз меньше общего числа перестановок семи букв $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$, т. е. равно

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210.$$

Точно так же разбирается общий случай: количество $P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ перестановок с повторениями, имеющих состав $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, выражается формулой:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_m)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}. \qquad (7)$$

Например, буквы слова «Миссисипи» можно переставлять

$$\frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 2520 \text{ способами.}$$

Из формулы (7) вытекает, что $m - k$ букв a и k букв b можно переставлять $\frac{m!}{k!\,(m-k)!}$ способами. Но это число равно C_m^k (см. формулу (6)). Значит, число перестановок с повторениями состава $(m - k, k)$ равно C_m^k:

$$P(m-k, k) = C_m^k. \quad (8)$$

Это утверждение можно доказать и не ссылаясь на общую формулу (7). В самом деле, любая перестановка с повторениями из $m-k$ букв a и k букв b однозначно определяется выбором мест, на которых стоят буквы b. Но общее число мест равно $(m-k)+k=m$, а буквы b занимают k мест, и эти места можно выбрать C_m^k способами.

Пример 14. Сколькими способами можно расставить белые фигуры: 2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзя и 1 короля на первой линии шахматной доски?

Решение. В этой задаче надо найти число кортежей длины 8, имеющих заданный состав (2, 2, 2, 1, 1). Число таких кортежей, т. е. перестановок с повторениями, равно:

$$P(2, 2, 2, 1, 1) = \frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040.$$

Упражнения

19. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

20. Имеется 20 наименований товаров. Сколькими способами их можно распределить по трем магазинам, если известно, что в первый магазин должно быть доставлено 8 наименований, во второй — 7 наименований и в третий — 5 наименований товаров?

10. Сочетания с повторениями. В предыдущем пункте мы нашли число кортежей данного состава. Найдем теперь число различных составов, которые могут иметь кортежи длины n, состоящие из элементов множества X, содержащего m элементов. Каждый такой состав является кортежем, состоящим из m чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$, таких, что $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$. Его можно записать в виде кортежа из нулей и единиц, заменив каждое число соответствующим числом единиц и поставив нуль после каждой группы единиц, кроме последней. Например, вместо кортежа (4, 2, 1) можно записать (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1), а вместо кортежа (2, 0, 0, 3) — кортеж (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1). Число единиц, входящих в полученные кортежи, равно $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$, а число нулей равно $m-1$. Поэтому число различных кортежей такого вида равно числу перестановок с повторениями из n единиц и $m-1$ нулей, т. е. $P(n, m-1)$. Но по формуле (8) $P(n, m-1)=C_{n+m-1}^n$.

Итак, мы доказали, что *число составов кортежей длины n, компоненты которых принадлежат данному m-элементному множеству, равно* C_{n+m-1}^n. Различные составы кортежей длины n, компоненты которых принадлежат данному m-элементному множеству, называют также *сочетаниями с повторениями из m элементов по n*. Их число обозначают $\bar{C}_m^n$. Мы доказали, что

$$\bar{C}_m^n = C_{n+m-1}^n. \quad (9)$$

Пример 15. Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

Решение. Поскольку в этой задаче порядок пирожных не играет роли, то каждый набор задается кортежем длины 8 из 4 элементов (названий сортов пирожных), причем порядок компонент кортежа не играет роли. Иными словами, нам надо найти число различных составов таких кортежей, т. е. число сочетаний с повторениями из 4 элементов по 8. Имеем:

$$\overline{C}_4^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$

Значит, существует 165 различных наборов.

Упражнения

21. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

22. 6 одинаковых предметов распределяются по трем ящикам. Сколькими способами можно это сделать, если каждый ящик может вместить все 6 предметов?

11. Правило суммы. До сих пор мы решали комбинаторные задачи с помощью правила произведения и его следствий, т. е. путем подсчета числа элементов в декартовом произведении множеств и в его подмножествах. Вместе с тем существует много задач, которые решаются путем подсчета числа элементов в объединении нескольких множеств. Если множества X_1, X_2, ..., X_m попарно не имеют общих элементов, т. е. $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов в каждом из множеств:

$$n(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m) = n(X_1) + n(X_2) + \ldots + n(X_m)$$

(см. с. 23, упр. 16). Это утверждение называют в комбинаторике *правилом суммы*. При $m = 2$ его можно сформулировать так:

Если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y — n способами, причем ни один способ выбора элемента x не совпадает с каким-либо способом выбора элемента y, то выбор «x или y» можно сделать k + n способами.

Например, если на блюде лежит 8 яблок и 6 груш, то один плод можно выбрать 14 различными способами.

Часто приходится комбинировать правила произведения и суммы.

Пример 16. Из города A в город B ведет k дорог, а в город C — l дорог. В город D из города B ведет m дорог, а из города C — n дорог. Города B и C дорогами не соединяются. Сколько различных автобусных маршрутов можно провести между городами A и D?

Решение. Рассмотрим всевозможные маршруты, идущие из A в D через B. Из A в B ведет k дорог, а из B в D — m дорог. Каждую из дорог, выходящую из A, можно комбинировать с любой

дорогой, входящей в D. Поэтому общее число различных маршрутов, идущих из A в D через B, находится по правилу произведения. Оно равно km. Аналогично подсчитывается число различных маршрутов, идущих из A в D через C; оно равно ln.

Далее, мы замечаем, что всякий автобусный маршрут, соединяющий A и D, должен проходить или через B, или через C (поскольку B и C дорогой не связаны) и, значит, он должен входить либо в число km маршрутов, идущих через B, либо в число ln маршрутов, идущих через C. Общее число различных маршрутов находится по правилу суммы: оно равно $km + ln$.

Упражнения

23. В школьной библиотеке имеются 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно взять в библиотеке все три романа так, чтобы ни один не был взят дважды?

12. Свойства чисел C_m^k. Числа C_m^k, выражающие количество k-элементных подмножеств данного множества X, состоящего из m элементов, т. е. количество сочетаний без повторений из m элементов по k, обладают целым рядом замечательных свойств, устанавливающих различные соотношения между подмножествами множества X. Их можно доказывать, непосредственно исходя из формулы (6). Но более содержательными являются доказательства, опирающиеся на теоретико-множественные рассуждения.

1) *Если* $0 \leqslant k \leqslant m$, *то*

$$C_m^k = C_m^{m-k}. \tag{10}$$

С помощью формулы (6) это утверждение доказывается сразу. Действительно, имеем:

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!\,(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = C_m^k.$$

Смысл этого утверждения состоит в следующем. Пусть множество X состоит из m элементов. Тогда каждому k-элементному подмножеству A множества X соответствует однозначно определенное подмножество, содержащее $(m-k)$ элементов. Оно получается из X удалением всех элементов подмножества A и называется *дополнением к A в X*. Любое $(m-k)$-элементное подмножество в множестве X является дополнением одного и только одного k-элементного подмножества. Значит, существует взаимно однозначное соответствие между k-элементными и $(m-k)$-элементными подмножествами, а потому число подмножеств этих двух видов одинаково. Это утверждение и выражается формулой (10).

2) *Справедливо равенство*

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m. \qquad (11)$$

В самом деле, мы доказали в п. 8 (с. 21), что общее число подмножеств m-элементного множества X равно 2^m. Но любое подмножество множества X содержит k элементов, где k — целое число, такое, что $0 \leqslant k \leqslant m$. Так как число k подмножеств в X равно C_m^k, то по правилу суммы общее число подмножеств m-элементного множества равно $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m$. Сравнивая два получившихся выражения для числа всех подмножеств множества X, получаем равенство (11).

3) *Для любых m и k, таких, что $1 \leqslant k \leqslant m-1$, верно равенство*

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k. \qquad (12)$$

В самом деле, так как

$$C_{m-1}^{k-1} = \frac{(m-1)!}{(k-1)!\,(m-k)!} = \frac{(m-1)!\cdot k}{k!\,(m-k)!}$$

и

$$C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!}{k!\,(m-1-k)!} = \frac{(m-1)!\cdot(m-k)}{k!\,(m-k)!},$$

то, подставляя эти значения в правую часть формулы (12), получаем:

$$C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!k}{k!\,(m-k)!} + \frac{(m-1)!\,(m-k)}{k!\,(m-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!\,(k+m-k)}{k!\,(m-k)!} = \frac{(m-1)!\cdot m}{k!\,(m-k)!} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = C_m^k.$$

Равенство (12) доказано.

Приведем второй вывод этого равенства, вскрывающий его теоретико-множественный смысл. Пусть X содержит m элементов. Выделим один из этих элементов, например элемент a. Тогда все k-элементные подмножества множества X разбиваются на два класса: первый состоит из подмножеств, не содержащих элемента a, а второй из подмножеств, содержащих этот элемент. Но если k-элементное подмножество не содержит элемента a, то оно является подмножеством множества X', получаемого из X удалением элемента a. Поэтому число k-элементных подмножеств первого класса равно числу k-элементных подмножеств множества X'. Поскольку X' содержит $m-1$ элементов, это число равно C_{m-1}^k. Найдем теперь число k-элементных подмножеств второго класса. Все эти подмножества содержат элемент a. Если исключить из них этот элемент, то получатся $(k-1)$-элементные подмножества, не содержащие a и состоящие из элементов множества X'. Следовательно, число подмножеств второго класса равно числу $(k-1)$-элементных подмножеств множества X', т. е. C_{m-1}^{k-1}.

Поскольку каждое k-элементное подмножество либо содержит элемент a, либо не содержит его, то оно принадлежит либо первому, либо второму классу. Значит, по правилу суммы получаем, что число C_m^k всех k-элементных подмножеств m-элементного множества X равно $C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$. Поэтому $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$.

13. Треугольник Паскаля. Формула (12) предыдущего пункта позволяет вычислять значения C_m^k, зная C_{m-1}^{k-1} и C_{m-1}^k. Иными словами, с помощью этого равенства можно последовательно вычислять C_m^k, используя, кроме указанного рекуррентного соотношения, то, что $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = \ldots = C_m^0 = C_m^m = 1$. Вычисления удобно записывать в виде треугольной таблицы:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & & 10 & 5 & 1 \\
\multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots}
\end{array}
$$

В $(m + 1)$-й строке таблицы по порядку стоят числа C_m^0, C_m^1, ..., C_m^m. При этом $C_m^0 = C_m^m = 1$, а остальные числа находятся по формуле (12). Поскольку C_{m-1}^{k-1} и C_{m-1}^k располагаются в этой таблице строкой выше, чем C_m^k, и находятся в верхней строке слева и справа от C_m^k, то для получения C_m^k надо сложить находящиеся слева и справа от него числа предыдущей строки. Например, значение 10 в шестой строке мы получили, сложив числа 4 и 6 пятой строки.

Такую треугольную таблицу называют треугольником Паскаля, по имени французского математика XVII в. Блэза Паскаля, детально изучившего ее свойства. Следует отметить, что такую таблицу знали уже арабские математики Гиясэддин Каши и Омар Хайям, жившие в XIII в., а из европейских ученых с нею был знаком итальянский математик и механик XVI в. Николо Тарталья.

14. Бином Ньютона. Числа, стоящие в строках треугольника Паскаля, встречаются при возведении в степень двучлена $a + b$. Например,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Замечаем, что коэффициенты 1, 2, 1 — это числа, стоящие в третьей строке таблицы, т. е. C_2^0, C_2^1, C_2^2, а 1, 3, 3, 1 — числа, стоящие в четвертой строке той же таблицы, т. е. C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3.

Это замечание делает естественной гипотезу, что для любого $n \in N$ истинно равенство

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n. \quad (13)$$

Проведем доказательство равенства (13) с помощью метода математической индукции.

При $n = 1$ равенство (13) принимает вид $(a + b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$ и истинно, поскольку $C_1^0 = C_1^1 = 1$.

Предположим теперь, что равенство (13) доказано при $n = m$, т. е.

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^{k-1} + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m. \quad (14)$$

Докажем, что тогда равенство (13) истинно и при $n = m + 1$. Чтобы это доказать, умножим обе части равенства (14) на $(a + b)$. Получим:

$$(a + b)^{m+1} = (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^{k-1} + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m)(a + b) = C_m^0 a^{m+1} + (C_m^0 + C_m^1) a^m b + \ldots + (C_m^k + C_m^{k-1}) a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^m b^{m+1}.$$

В самом деле, $a^{m-k+1} b^k$ может получиться в двух случаях: при умножении $C_m^k a^{m-k} b^k$ на a и при умножении $C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^{k-1}$ на b. А теперь вспомним, что

$$C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1, \quad C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1, \quad C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k.$$

Мы получаем: $(a + b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + \ldots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \ldots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}$.

Это равенство есть не что иное, как равенство (13) при $n = m + 1$.

Итак, мы доказали, что формула (13) верна при $n = 1$, а из ее справедливости при $n = m$ вывели, что она истинна и при $n = m + 1$. По принципу математической индукции заключаем, что она верна при всех $n \in N$.

Формулу (13) называют формулой *бинома Ньютона*, по имени английского ученого XVI—XVII вв. Исаака Ньютона, хотя она была известна задолго до Ньютона уже упоминавшемуся Гиясэддину Каши и другим. Заслуга Ньютона состоит в том, что он нашел обобщение формулы (13) на случай действительных показателей.

С помощью формулы (13) можно получить как некоторые известные свойства чисел C_n^k (эти коэффициенты многочлена в правой части формулы (13) носят название *биномиальных коэффициентов*), так и новые свойства. Например, полагая в формуле (13) $a = b = 1$, получаем:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$$

(см. формулу (11) из п. 11). А если положить $a = 1$, $b = -1$, то будем иметь:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

откуда находим, что

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots .$$

Пример 17. Найдем разложение степени бинома $(2x - 3)^5$.

Решение. Положив $a = 2x$, $b = -3$, получим:

$$(2x - 3)^5 = (a + b)^5 =$$
$$= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5 = (2x)^5 +$$
$$+ 5\,(2x)^4\,(-3) + 10\,(2x)^3\,(-3)^2 + 10\,(2x)^2\,(-3)^3 +$$
$$+ 5\,(2x)\,(-3)^4 + (-3)^5 = 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 +$$
$$+ 810x - 243.$$

Пример 18. Докажем, что $(3^{2n+3} - 24n + 37) \vdots 64$ при любом $n \in N$.

Решение. Имеем:

$$3^{2n+3} - 24n + 37 = 27 \cdot 9^n - 24n + 37 =$$
$$= 27\,(1 + 8)^n - 24n + 37 =$$
$$= 27\,(C_n^0 + C_n^1 \cdot 8 + C_n^2 \cdot 8^2 + C_n^3 \cdot 8^3 + \ldots + C_n^n \cdot 8^n) - 24n + 37 =$$
$$= 27 + 216n + 8^2 \cdot \underbrace{(27C_n^2 + 27C_n^3 \cdot 8 + \ldots + 27C_n^n \cdot 8^{n-2})}_{a} -$$
$$- 24n + 37 = 64 + 192n + 64a.$$

Полученная сумма делится на 64, что и требовалось доказать.

Замечание. Этот пример можно решить и с помощью метода математической индукции (см. с. 17, упр. 9, *е*).

Упражнения

24. Напишите разложение степени бинома $(x + 1)^7$.

25. Найдите коэффициент при x^4 в выражении

$$x\,(1 - x)^4 + x^2\,(1 + 2x)^8 + x^3\,(1 + 3x)^{12}.$$

26. Найдите коэффициент при x^3 в выражении

$$(1 + x)^3 + (1 + x)^4 + (1 + x)^5 + \ldots + (1 + x)^{10}.$$

27. Найдите наибольший член разложения $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20}$.

28. Каков наибольший коэффициент разложения $(a + b)^n$, если сумма всех коэффициентов равна 4096?

29. Выполните упр. 9, *б* на с. 17 без использования метода математической индукции.

15. Полиномиальная формула. Вывод формулы бинома Ньютона можно получить другим способом, отличным от приведенного выше в п. 13. Для этого запишем выражение $(a + b)^n$ следующим образом:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ раз}}$$

и раскроем скобки, выписывая множители в порядке их появления (например, $(a+b)^2$ запишем в виде:

$$(a+b)(a+b) = aa + ba + ab + bb,$$

а $(a+b)^3$ в виде:

$$(a+b)(a+b)(a+b) = \\ = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb)$$

Ясно, что слагаемые в правой части будут произведениями элементов всевозможных перестановок с повторениями длиной n из букв a и b. Чтобы привести подобные члены, нужно найти число перестановок, имеющих заданный состав (n_1, n_2), где $n_1 + n_2 = n$, т. е. $P(n_1, n_2)$. Таким образом, получим сумму слагаемых вида $P(n_1, n_2)\, a^{n_1} b^{n_2}$. Используя знак суммы $\sum$ («сигма» — буква греческого алфавита), приходим к следующему равенству:

$$(a+b)^n = \sum P(n_1, n_2)\, a^{n_1} b^{n_2}, \qquad (15)$$

где суммирование распространяется на все кортежи (n_1, n_2), такие, что $n_1 + n_2 = n$.

Чтобы перейти от равенства (15) к более привычной записи (см. формулу (13)), достаточно положить $n_2 = k$, $n_1 = n - k$ и заметить, что $P(n-k, k) = C_n^k$ (см. формулу (8) из п. 9).

Проведенное доказательство формулы (15) без изменений переносится на случай нескольких слагаемых. Рассуждая точно так же, как и выше, убеждаемся, что

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum P(n_1, n_2, \ldots, n_m) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{n_m}, \qquad (16)$$

где суммирование распространено на все кортежи $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, такие, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$.

Формула (16) носит название *полиномиальной*.

Пример 19. Раскроем скобки в выражении $(a+b+c)^3$.

Решение. Воспользовавшись полиномиальной формулой (16), получим:

$$(a+b+c)^3 = \sum P(n_1, n_2, n_3)\, a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3},$$

где $n_1 + n_2 + n_3 = 3$. Кортежи (n_1, n_2, n_3), удовлетворяющие этому последнему условию, могут иметь следующий вид:

(3, 0,0,), (0, 3,0), (0, 0, 3), (2, 1, 0), (2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, 1, 1).

Итого 10 возможностей. В соответствии с этим получаем сумму 10 слагаемых:

$$(a+b+c)^3 = \frac{3!}{3!0!0!} a^3 b^0 c^0 + \frac{3!}{0!3!0!} a^0 b^3 c^0 + \frac{3!}{0!0!3!} a^0 b^0 c^3 +$$

$$+\frac{3!}{2!1!0!}a^2bc^0+\frac{3!}{2!0!1!}a^2b^0c+\frac{3!}{0!2!1!}a^0b^2c+\frac{3!}{1!2!0!}ab^2c^0+\frac{3!}{1!0!2!}ab^0c^2+$$

$$+\frac{3!}{0!1!2!}a^0bc^2+\frac{3!}{1!1!1!}abc=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+$$

$$+3b^2c+3ab^2+3ac^2+3bc^2+6abc.$$

Пример 20. Разложим на множители многочлен

$$a^3+b^3+c^3-3abc.$$

Решение. Воспользуемся найденным в предыдущем примере разложением для $(a+b+c)^3$. Получим:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3\ (a^2b+ab^2+a^2c+$
$+ac^2+b^2c+bc^2+3abc)=(a+b+c)^3-3\ ((a^2b+ab^2+$
$+abc)+(a^2c+ac^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc))=(a+b+c)^3-$
$-3\ (a+b+c)\ (ab+ac+bc)=(a+b+c)\ ((a+b+c)^2-$
$-3\ (ab+ac+bc))=(a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$

Упражнения

30. Найдите число членов разложения $(a+b+c+d)^4$.
31. Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1+2x+3x^2)^{10}$.

16. Доказательство малой теоремы Ферма. В п. 6 (с. 17) индуктивным путем мы пришли к формулировке малой теоремы Ферма: *для любых* $n\in N$ *выражение* n^p-n, *где* p — *простое число, делится на* p. Теперь мы можем провести доказательство этой теоремы. Воспользуемся методом математической индукции.

При $n=1$ утверждение справедливо, так как $1^p-1=0$ делится на p. Пусть уже доказано, что k^p-k делится на p. Чтобы доказать делимость на p числа $(k+1)^p-(k+1)$, рассмотрим разность

$$(k+1)^p-(k+1)-(k^p-k).$$

Раскрыв $(k+1)^p$ по формуле бинома Ньютона, получим:

$$(k+1)^p-(k+1)-(k^p-k)=C_p^0k^p+C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}+$$
$$+\ldots+C_p^{p-1}k+C_p^p-k-1-k^p+k=C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}+$$
$$+\ldots+C_p^{p-1}k. \qquad (17)$$

Но при $1\leqslant i\leqslant p$ имеем:

$$C_p^i=\frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot i}.$$

Поскольку число p простое, оно не делится ни на одно из чисел 1, 2, ..., i, стоящих в знаменателе. Поэтому C_p^i делится на p при $1\leqslant i\leqslant p$. Но тогда все слагаемые в правой части равенства (17) делятся на p, а значит, и левая часть делится на p. Поскольку в

силу предположения индукции $k^p - k$ делится на p, то и $(k+1)^p - (k+1)$ делится на p.

По принципу математической индукции $n^p - n$ делится на простое число p при всех $n \in N$.

Упражнения

32. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, немецкого, французского и испанского — на любой другой из этих языков?

33. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 50 фехтовальщиков каждое, надо выделить по три фехтовальщика для участия в соревнованиях. Сколькими способами это можно сделать?

34. В фортепианном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова — 15, в вокальном кружке — 12 и в фотокружке — 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

35. Собрание из 80 человек выбирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

36. На собрании должны выступить 5 человек: A, $Б$, B, $Г$ и D. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что A должен выступить непосредственно перед $Б$?

37. Сколько нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру использовать не более одного раза?

38. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого — 9 книг. Сколькими способами они могут обменять друг с другом по две книги?

39. Пять юношей и три девушки играют в шахматы. Сколькими способами они могут разбиться на две команды, если в каждой команде должно быть хотя бы по одной девушке?

40. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

41. У мамы 10 яблок и 5 груш. Каждый день в течение 15 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

42. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение пяти дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

43. Сколько чисел меньших, чем миллион, можно записать с помощью цифр 9, 8 и 0 (записи, начинающиеся с нуля, считаются недопустимыми)?

44. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123 153?

45. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

46. Для фотографирования группы, состоящей из восьми мужчин и шести женщин, фотограф хочет посадить в первый ряд двух женщин и трех мужчин так, чтобы лица одного пола не сидели рядом. Сколькими способами может быть сформирован первый ряд?

47. 30 человек голосуют по пяти предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение?

ОТВЕТЫ

1. 560. **2.** 81. **3.** 5^6. **4.** $2^{10} = 1024$. **5.** m^k. **6.** 720. **7.** 60; 36. **8.** 700. **9.** 1800 **10.** $6! = 720$. **11.** 111. **12.** 6!, 10!, 11!. **13.** 230 300; 18 424. **14.** 968. **15.** $\frac{30!}{(10!)^3}$. **16.** C_n^2. **17.** 90; $\frac{n(n-3)}{2}$. **18.** $C_{10}^2 \cdot C_7^2 = 945$. **19.** $\frac{10!}{2!3!2!}$. **20.** $\frac{20!}{8!7!5!}$. **21.** $\overline{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12}$. **22.** 28. **23.** 134. **24.** $(x+1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$. **25.** 144. **26.** 330. **27.** $314\,925 \cdot 10^5$. **28.** C_{12}^6. **30.** 34. **31.** 16 725. **32.** 20. **33.** $(C_{50}^3)^2$. **34.** $C_{10}^3 \cdot C_{15}^4 \cdot C_{12}^5 \cdot C_{20}^1$. **35.** $A_{80}^2 \cdot C_{78}^3$. **36.** 24. **37.** 32. **38.** 756. **39.** 90. **40.** 371. **41.** 3003. **42.** 1260. **43.** 728. **44.** 255. **45.** 2880. **46.** 8400. **47.** 46 376.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей — математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми.

(БСЭ. 3-е изд., т. 4, с. 540.)

Введение. Задачи, которые вы решаете на уроках физики и математики, обычно предусматривают однозначный результат действия. Например, если выпустить камень из рук, то он начинает падать с постоянным ускорением. Положение камня может быть вычислено в любой момент времени. Но есть большой круг задач, начинающий играть все большее и большее значение в самых разных науках и их технических и хозяйственных приложениях, в которых результат действия не определен однозначно. Рассмотрим простейший пример. Если подбросить монету, то нельзя точно сказать, какой стороной она ляжет вверх — гербом или цифрой. Здесь результат действия — броска монеты — не определен однозначно. Может показаться, что в подобных задачах вообще ничего определенного сказать нельзя. Однако даже обычная игровая практика показывает обратное: при большом числе бросков примерно в половине случаев выпадет герб, а в половине — цифра. И это уже некоторая закономерность. Именно такие закономерности и изучаются в теории вероятностей. При этом изменяется сама постановка задачи. Нас будет интересовать не результат отдельного опыта, а результат, полученный после многократного его повторения. Коротко говорят, что в теории вероятностей изучаются закономерности массовых случайных событий.

Мы привели пример с подбрасыванием монеты, поскольку это самая простая и всем хорошо знакомая ситуация, в которой результат действия не определен однозначно. Но не следует думать, что только такие игровые задачи рассматриваются в теории вероятностей.

Возьмем одну из важных задач народного хозяйства — организацию телефонной связи в районе, в области. При этом возникает вопрос: сколько надо протянуть телефонных линий к районному центру? Это тоже чисто вероятностная задача. Заранее нельзя предсказать, сколько вызовов и в какой час поступит в районный центр. Если телефонных линий провести слишком мало, то до центра будет невозможно дозвониться. Если же их провести много, то дозвониться будет просто, но большая часть проведенной сети будет простаивать, т. е. затраты на организацию связи завышены.

Аналогичное положение и при организации работы в порту. Здесь надо решить, сколько необходимо погрузочно-разгрузочного

оборудования. Суда, совершающие дальние рейсы, не могут выдерживать точного расписания. Поэтому приход судов в порт тоже относится к категории случайных событий. И планирование оборудования порта должно строиться в соответствии с выводами из теории вероятностей. Если оборудования мало, то суда будут долго стоять под разгрузкой и в очереди на нее, а за это приходится платить большие деньги. Если же оборудования очень много, то очереди на разгрузку не будет и разгрузка будет проходить быстро. Но при этом большая часть портового оборудования будет простаивать, т. е. в затратах на оборудование порта окажется допущен перерасход средств.

Еще один пример вероятностной задачи. Представьте себе, что в школе организовано соревнование между классами и вы хотите определить, какой класс написал городскую контрольную работу по алгебре лучше. Для этого достаточно вывести для каждого класса среднюю оценку (подсчитав среднее арифметическое из полученных классом оценок) и сравнить их. Тогда места в соревновании распределятся в соответствии с полученными средними оценками. Спрашивается, сколько знаков после запятой правомерно учитывать при таком сравнении? Оказывается, что для классов в 30—40 человек правомерно учитывать только десятые, т. е. средние по классу оценки надо брать с точностью до 0,1. Ну а если аналогичное сравнение захотят сделать по школам, т. е. сравнить, какая школа написала городскую контрольную по математике лучше, опираясь на средний балл за контрольную по школе? Сколько тогда правомерно брать знаков при вычислении среднего балла? Оказывается, что, для того чтобы можно было учитывать уже и сотые доли, необходимо, чтобы число принимаемых во внимание контрольных работ доходило до 2500.

Большое число вероятностных задач возникает при постановке экспериментов и планировании. Например, сколько опытов надо поставить, чтобы выводы из них были достоверны? Если опытов слишком мало, то, естественно, возникает сомнение: может, результаты опытов — это случайное совпадение? Конечно, чем больше опытов, тем надежнее сделанные из них выводы. Но на каком-то числе опытов надо и остановиться — их нельзя делать до бесконечности. Ведь каждый опыт — это затраченные деньги, и здесь тоже не должно быть неоправданного перерасхода. Теория вероятностей и здесь приходит на помощь. Имеется целый ряд рекомендаций, касающихся необходимого числа опытов для получения достаточно надежных выводов из эксперимента.

Подобных задач вскрывается все больше и больше. Их решение требует большой теоретической подготовки. Поэтому мы их касаться не будем. Наши задачи будут иметь более игровой характер, поскольку в них гораздо проще обнаружить вероятностные закономерности, они привычнее. Но уже на них можно будет проследить за основными вероятностными закономерностями и спецификой постановки и решения вероятностных задач.

В эпиграф вынесено определение теории вероятностей. В этом определении есть целый ряд понятий: случайное событие, вероятность случайного события, связь между случайными событиями. Все они нуждаются в определении и разъяснении. К этому мы и переходим.

1. Случайные события. В теории вероятностей (как и в любой другой науке) жизнь изучается не во всей ее сложности, а только с одной определенной стороны. При этом строится некоторая схема (или модель), которая более или менее полно отражает интересующую нас сторону жизни. Эта схема и изучается. Например, в геометрии изучаются свойства фигур: точек, прямых и т. п. В реальной жизни таких фигур нет. Поэтому мы имеем дело с моделями, полученными как результат моделирования, схематизирования, абстрагирования определенной стороны реальной жизни. В физике рассматривается материальная точка, идеальный газ и т. п. Это тоже модельное представление определенных сторон реальной жизни — в природе материальных точек и идеального газа нет.

В теории вероятностей рассматривается следующая модель изучаемых явлений реальной жизни: делается *опыт* (*испытание*), в результате происходят случайные *события* (часто говорят просто — события). Например, бросили монету и посмотрели, что выпало, — это опыт. В результате этого опыта может выпасть герб — это одно событие, а может выпасть цифра — это другое событие. Поскольку выпадение герба зависит от случая, то это случайное событие. События принято обозначать большими буквами: A, B, C и т. п. Например, в опыте с броском монеты событие «выпал герб» естественно обозначить буквой $Г$. При этом пишут: $Г$ = «выпал герб». Аналогично событие «выпала цифра» обозначают буквой $Ц$.

Рассмотрим еще один опыт, несколько более богатый событиями, чем опыт с бросанием монеты, — бросание игральной кости. Этот опыт состоит в следующем. Игральную кость (кубик, на сторонах которого указаны точки: 1, 2, 3, 4, 5 и 6, соответствующие количеству очков) бросают на стол и смотрят (на верхней грани), сколько выпало очков. При этом могут произойти следующие события:

Q_1 = «выпало 1 очко»,
Q_2 = «выпало 2 очка»,
Q_3 = «выпало 3 очка»,
Q_4 = «выпало 4 очка»,
Q_5 = «выпало 5 очков»,
Q_6 = «выпало 6 очков».

Но можно рассматривать и другие события, связанные с опытом бросания игральной кости:

$Q_{\text{пр}}$ = «число выпавших очков простое»,
Q_{3k} = «число выпавших очков делится на 3»,
$Q_{\text{ч}}$ = «число выпавших очков четно»,
$Q_{\text{н}}$ = «число выпавших очков нечетно»

и т. п.

Уже на этих простых опытах мы можем заметить, что события $Q_ч$ и $Q_н$ не могут произойти одновременно. Такую особую связь между событиями можно наблюдать в любом опыте, и она носит определенное название.

Определение. *Два события называются несовместными, если они в рассматриваемом опыте не могут произойти одновременно. События, которые в рассматриваемом опыте могут произойти одновременно, называются совместными.*

Например, в опыте с броском игральной кости события $Q_ч$ и $Q_{пр}$ совместны. Действительно, пусть выпало 2 очка. Число 2 четное, следовательно, произошло событие $Q_ч$. С другой стороны, число 2 простое, следовательно, произошло событие $Q_{пр}$. Аналогично события $Q_з$ и $Q_{пр}$ тоже совместны. Однако между совместностью пары событий $Q_з$ и $Q_{пр}$ и пары событий $Q_ч$ и $Q_{пр}$ наблюдается существенная разница. Для первой пары из того, что произошло событие $Q_з$, автоматически следует, что произошло и событие $Q_{пр}$. Для второй же пары этого нет. В самом деле, предположим, что выпало 4 очка, т. е. произошло событие $Q_ч$. А событие $Q_{пр}$ при этом не произошло, так как 4 не является простым числом. Таким образом, для второй пары из того, что произошло одно из совместных событий, еще не следует, что автоматически произошло и другое.

Определение. *Событие A благоприятствует событию B (пишут $A \subset B$), если из того, что произошло событие A, следует, что произошло событие B. Если же из того, что произошло событие A, еще не следует, что произошло событие B, то событие A не благоприятствует событию B* (пишут $A \not\subset B$).

Так, в опыте с броском игральной кости $Q_з \subset Q_{пр}$, $Q_ч \not\subset Q_{пр}$.

Заметим еще одно существенно важное обстоятельство. В опыте с броском игральной кости события Q_1, Q_2, ..., Q_6 как бы играют особую роль для этого опыта. Сущность этой особой роли состоит в том, что в результате опыта одно из этих событий обязательно происходит, а любые два из них несовместны.

Определение. *Множество событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате опыта обязательно происходит, а любые два из них несовместны, называется множеством элементарных событий (или исходов) этого опыта, а каждое событие из этого множества называется элементарным событием рассматриваемого опыта или его исходом.*

Так, в опыте с броском игральной кости события Q_1, Q_2, ..., Q_6 образуют множество исходов этого опыта. Подчеркнем, что для одного и того же опыта можно рассматривать разные множества исходов. Например, для опыта с броском игральной кости можно рассматривать множество из двух исходов — $Q_ч$ и $Q_н$. В самом деле, эти события несовместны, и в результате опыта (броска игральной кости) одно из них обязательно происходит. От того, как выбрано множество элементарных событий опыта, зависит большая или меньшая сложность решения поставленной вероятностной

задачи: при удачном выборе решение сильно упрощается, а при неудачном или усложняется, или вообще не может быть найдено.

Итак, мы познакомились со случайными событиями и простейшими видами связей между ними. Более подробно об этих связях будет рассказано в п. 3.

Разобранная в этом пункте схема проведения опыта содержит, как частный случай, привычные вам задачи, в которых результат действий определен однозначно.

Упражнения

1. В приведенных ниже опытах укажите совместные и несовместные события, какое событие какому благоприятствует:

а) Опыт — бросок одной монеты; события: $Ц$ = «выпала цифра» и $Г$ = «выпал герб».

б) Опыт — бросок двух монет; события: A = «хотя бы на одной из монет выпала цифра», B = «хотя бы на одной из монет выпал герб», C = «на обеих монетах выпала цифра», D = «на обеих монетах выпал герб».

в) Опыт — два выстрела по мишени; события: A = «ни одного попадания», B = «одно попадание», C = «два попадания», D = = «нет промаха».

г) Опыт — вынимание косточки домино; события: A = «вынуто 6 очков», B = «вынуто 3 очка», C = «на вынутой косточке три и пусто».

2. В упражнении 1б) будут ли события A и B образовывать множество исходов опыта?

3. В упражнении 1б) будут ли события C и D образовывать множество исходов опыта?

4. Какое третье событие H надо добавить к событиям C и B в упражнении 1б), чтобы получить множество исходов?

5. Укажите множество исходов опыта в упражнении 1 в).

2. Классическое определение вероятности события. «Вероятность математическая, числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях». (К о л м о г о р о в А. Н. БСЭ. 3-е изд., т. 4, с. 544.) В энциклопедии дано описательное определение вероятности события. Дать математически корректное определение можно только на основе глубокого знания современной математики. Однако в приведенном определении отражены все существенные стороны этого понятия. Обратим внимание на одно место в определении: опыт (т. е. определенные условия, в которых появляется рассматриваемое событие) может повторяться неограниченное число раз (по крайней мере теоретически). В том случае, если опыт не может быть повторен неограниченное число раз, нельзя говорить о вероятностях событий, происходящих в этом опыте.

Это связано с объяснением первой части определения. Что значит «степень возможности появления» события в данном опыте? Что значит, что эта «степень» характеризуется числом p? Это значит следующее: если опыт повторен n раз, то событие произойдет приблизительно pn раз. При этом, если событие произошло m раз, то частота появления события — число $\frac{m}{n} \approx p$ и точность этого равенства будет тем больше, чем больше n. Иначе говоря, связь, которая существует между опытом и событием и характеризуется числом p — вероятностью события в рассматриваемом опыте, выявляется только при многократном повторении этого опыта.

Изучение понятия вероятности события обычно начинается с самого простого частного случая — так называемого классического определения. Оно опирается на понятие равновероятности событий.

Начнем с примеров. В опыте с броском монеты события $Г =$ $=$ «выпал герб» и $Ц =$ «выпала цифра» очевидно равновероятны. Это утверждение основано на том, что монета симметрична и однородна. В опыте с броском игральной кости события Q_1, Q_2, ..., Q_6 тоже, очевидно, равновероятны. Это следует из однородности материала кости и ее симметричной формы. Таким образом, равновероятность событий обычно устанавливается исходя из того, что условия опыта симметричны относительно рассматриваемых событий. При этом симметрия понимается в широком смысле этого слова: и геометрическая симметрия, и физическая симметрия (например, однородность материала, из которого изготовлена игральная кость или монета) и т. д. На первый взгляд может показаться странным, что при введении понятия равновероятности событий мы как бы отступаем от математической терминологии и обращаемся к описаниям и примерам. Посмотрим еще раз на определение теории вероятностей, данное в эпиграфе. В нем сказано: «... по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий...». То есть для того, чтобы можно было начать решение задачи средствами теории вероятностей, необходимо, чтобы вероятности некоторых событий в задаче уже были указаны. Откуда же эти вероятности берутся? Их дают те конкретные науки, в рамках которых возникла решаемая вероятностная задача. При этом зачастую основную роль играют соображения не математические, а той науки, в рамках которой возникла задача. Понятие равновероятности событий — это есть одна из форм указания начальных вероятностей.

Теперь можно дать классическое определение вероятности случайного события.

Определение. *Пусть множество исходов опыта состоит из n равновероятных исходов. Если m из них благоприятствуют событию A, то вероятностью события A называется число*

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Позднее (в п. 11) вы увидите, что такое определение вероятности случайного события согласовано со сказанным выше о связи частоты и вероятности события.

Пример 1. Какова вероятность того, что при броске игральной кости выпадет четное число очков?

Решение. В опыте «бросок игральной кости» мы имеем 6 равновероятных исходов: события $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$. Нас интересует вероятность события $Q_ч$. Этому событию благоприятствуют три исхода опыта: события Q_2, Q_4 и Q_6. Следовательно, $n = 6$, $m = 3$, а искомая вероятность

$$P(Q_ч) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Бросили две монеты. Какова вероятность того, что на каждой монете выпал герб?

Решение. Сразу напрашивается множество исходов, состоящее из трех событий (здесь опыт — бросок двух монет): «на обеих монетах выпал герб» = $Г$, «на обеих монетах выпала цифра» = $Ц$ и «на одной монете выпал герб, а на другой монете выпала цифра» = A. Но интуитивно ясно, что это не равновероятные события — событие A имеет больше шансов появиться. Чтобы получить равновероятные исходы, внесем в этот опыт некоторое дополнение, которое не изменит вероятностной структуры задачи. Именно, возьмем одну монету медную, а другую серебряную. Это добавление позволит выделить равновероятные исходы испытания. Ими будут события $Г$, $Ц$, A_1 = «на серебряной монете выпал герб, на медной монете выпала цифра» и A_2 = «на серебряной монете выпала цифра, на медной монете выпал герб». Эти четыре события уже равновероятны, поскольку условия опыта относительно них симметричны. Они также образуют множество исходов рассматриваемого опыта. Теперь все подготовлено для того, чтобы можно было обратиться к теории вероятностей (до сих пор мы пользовались условиями задачи для выяснения некоторых основных, исходных вероятностей: в нашем случае это сводилось к выявлению равновероятных исходов испытания). Равновероятных исходов испытания 4, т. е. $n = 4$. Нас интересует вероятность события $Г$. Ему благоприятствует только один исход, т. е. $m = 1$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(Г) = \frac{1}{4}.$$

Пример 3. Из семи одинаковых билетов один выигрышный. Семь человек по очереди и наугад берут (и не возвращают обратно) по одному билету. Зависит ли вероятность взять выигрышный билет от номера в очереди?

Решение. Опишем математическую модель этого примера. Перенумеруем все билеты, начиная с выигрышного. В результате опыта билеты оказываются распределенными между людьми, ко-

торые занимали определенные места в очереди. Этим упорядочивается множество из семи билетов: на первом месте оказывается билет, взятый человеком, стоявшим в очереди первым; на втором месте оказывается билет, взятый человеком, стоявшим в очереди вторым, и т. д. Таким образом, исходом опыта является получение некоторой перестановки из 7 билетов, их число $n = 7!$. Поскольку билеты берутся наугад, то все эти исходы равновероятны. Нас интересует вероятность события A = «человек, стоявший в очереди на k-м месте, взял выигрышный билет». Этому событию благоприятствуют исходы, при которых получаются перестановки, имеющие на k-м месте выигрышный билет, а остальные 6 мест заняты произвольной перестановкой из оставшихся шести невыигрышных билетов, их число $m = 6!$ Следовательно,

$$P(A) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}.$$

Видим, что вероятность взять выигрышный билет не зависит от номера очереди.

Пример 4. Бросили две игральные кости и сосчитали сумму выпавших очков. Что вероятнее получить в сумме: 7 или 8?

Решение. В этой задаче опыт состоит в том, что бросают две игральные кости и берут сумму выпавших очков. Исходы этого опыта таковы: «в сумме выпало 2», «в сумме выпало 3» и т. д., «в сумме выпало 12». Но это не равновероятные исходы. Действительно, в сумме может получиться 2 только одним способом: $2 = 1 + 1$, а в сумме может получиться 4 двумя способами: $4 = 1 + 3$ и $4 = 2 + 2$, т. е. шансов на то, что в сумме получится 4, больше. Теперь попробуем уточнить выбор исходов опыта и рассмотрим такие события: «на одной кости выпало k очков, а на другой — p»: $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Но это тоже не равновероятные исходы опыта: интуиция подсказывает, что выпадение одинакового числа очков менее вероятно, чем разного. Чтобы получить равновероятные исходы, внесем в эту задачу некоторый дополнительный элемент, который не меняет вероятностную сторону задачи. Именно, окрасим кости в разные цвета — красный и синий. Но этот элемент позволит нам, наконец, выявить равновероятные исходы рассматриваемого опыта. Это будут следующие события: «на красной кости выпало k очков, а на синей — p очков» $= (k; p)$. Поскольку кости отличаются только цветом, то ясно, что указанные события равновероятны и, кроме того, они образуют множество исходов нашего опыта. Остается подсчитать число всех исходов. Их 36, поскольку каждое из 6 очков, которые могут выпасть на красной кости, может быть в паре с любым из 6 очков, которые могут выпасть на синей. Теперь подсчитаем число исходов, благоприятствующих рассматриваемым событиям. Событию «сумма выпавших очков равна семи» $= A$ благоприятствуют следующие 6 исходов: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2) и (6; 1). Следовательно,

$$P(A) = \frac{6}{36}.$$

Событию «сумма выпавших очков равна 8» $= B$ благоприятствуют следующие 5 исходов: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2). Следовательно,

$$P(B) = \frac{5}{36}.$$

Мы видим, что сумма очков 7 есть более вероятное событие, чем сумма очков 8.

Интересно отметить, что этот факт был замечен игроками в кости. Попытки его объяснить (и решение ряда задач по страхованию и т. п.) привели к созданию математической теории — начал теории вероятностей.

Пример 5. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров. Из них 12 белых и 8 черных. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым? (Точный смысл выражения «наугад вынимается шар» будет выяснен в процессе решения.)

Решение. В этой задаче рассматривается следующий опыт: из ящика наугад вынимают шар и смотрят его цвет. Сразу напрашивается множество исходов, состоящее из двух событий: $Ч =$ $=$ «вынутый шар черный» и $Б =$ «вынутый шар белый». Но эти исходы неравновероятны, так как белых шаров больше и шансов вынуть белый шар больше. Для выявления в этом опыте множества равновероятных исходов внесем в опыт дополнительный элемент, не нарушающий вероятностной структуры задачи, а именно, перенумеруем все шары. Белым шарам поставим в соответствие номера с 1 по 12, а черным — номера с 13 по 20. События «вынут шар с номером k» $= A_k$ уже равновероятны, так как шары на ощупь неотличимы и вынимаются наугад. Кроме того, эти 20 событий образуют множество исходов нашего опыта. Следовательно, $n = 20$, а интересующему нас событию B благоприятствуют первые 12 исходов, т. е. $m = 12$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

Точный смысл выражения «наугад вынимается шар» состоит в том, что введенные события A_k равновероятны.

Пример 6. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров. Из них 12 белых и 8 черных. Наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба они белые, что они разного цвета?

Решение. Как и раньше, для выявления равновероятных исходов перенумеруем все шары номерами с 1 по 20. События «вынутые шары имеют номера k и p» $= (k, p)$, очевидно, равновероятны и являются исходами нашего опыта. Число этих событий есть число двухэлементных подмножеств множества из 20 элементов, т. е. $n = C_{20}^2$. Событию $B =$ «оба шара белые» благоприят-

ствуют исходы, для которых k и p изменяются от 1 до 12, и различные, т. е. это число двухэлементных подмножеств множества, состоящего из 12 элементов, — $m = C_{12}^2$.
Следовательно, ответ на первый вопрос задачи такой:

$$P(B) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 19} = \frac{33}{95} \approx 0{,}35.$$

При решении второй части задачи мы рассматриваем те же исходы. Событию A = «вынуты шары разного цвета» благоприятствуют исходы, для которых один номер k может быть любым от 1 до 12, а другой номер p может быть любым от 13 до 20. Любое из возможных 12 значений k может комбинироваться с любым из возможных 8 значений p. Следовательно, число благоприятствующих событию A исходов есть $m = 12 \cdot 8$, а

$$P(A) = \frac{12 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{48}{95} \approx 0{,}5.$$

Из решения приведенных примеров видно, что для выявления множества равновероятных исходов опыта часто приходится вносить в рассматриваемый опыт дополнительный элемент, который не изменяет вероятностную структуру этого опыта. От того, насколько удачно сделано это дополнение, зависит сложность решения задачи.

При решении примеров мы подсчитывали число исходов опыта, благоприятствующих рассматриваемому событию. При этом нам приходилось пользоваться принципом произведения в комбинаторике. Сформулируем и докажем этот принцип.

Принцип произведения. Пусть даны два множества:

$$A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_k\} \text{ и } B = \{b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_s\},$$

содержащие k и s элементов соответственно. Тогда множество, состоящее из всех различных пар $(a_i\ ;\ b_j)$, $a_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $b_j \in B$, $j = 1, 2, \ldots, s$, содержит ks элементов.

Для доказательства разобьем все множество рассматриваемых пар на непересекающиеся подмножества. В первое подмножество соберем все пары с элементом $a_1 \in A$. Таких пар s (по числу элементов $b_j \in B$). Во второе подмножество соберем все пары с элементом $a_2 \in A$. Их тоже будет s. В подмножество с номером i соберем все пары с элементом $a_i \in A$. Число этих пар тоже s. Всех подмножеств будет k (по числу элементов $a_i \in A$). Следовательно, всех пар ks (k подмножеств по s пар в каждом подмножестве). При этом подмножества не имеют общих пар, так как они отличаются элементами множества A, и все рассматриваемые пары при этом учтены. Действительно, берем произвольную пару из рассматриваемых. В нее входит элемент $a_i \in A$. Следовательно, эта пара входит в подмножество с номером i.

Пример 7. В одном ящике лежат 8 белых и 12 красных шаров, в другом — 15 синих и 5 черных шаров. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что вынули красный и черный шары?

Решение. Перенумеруем все шары: a_1, a_2, ..., a_8 — белые, a_9, a_{10}, ..., a_{20} — красные (в первом ящике), b_1, b_2, ..., b_{15} — синие и b_{16}, b_{17}, ..., b_{20} — черные (во втором ящике). В результате опыта получаются события (a_i, b_j) = «вынут шар a_i и вынут шар b_j». Эти события образуют множество исходов проводимого опыта. Так как шары вынимаются наугад, то эти события равновероятны. По принципу произведения число этих событий $n = 20 \times \times 20 = 400$. Интересующему нас событию благоприятствуют исходы опыта, для которых выполнены неравенства: $9 \leqslant i \leqslant 20$ и $16 \leqslant j \leqslant 20$. Их число (в силу принципа произведения) $m = 12 \times \times 5 = 60$. Следовательно, вероятность интересующего нас события будет равна:

$$\frac{m}{n} = \frac{60}{400} = \frac{3}{20} = 0{,}15.$$

Пример 8. На пяти одинаковых на ощупь карточках написаны буквы: на двух карточках—буква Л и на трех карточках—буква И. Выкладываем наугад эти карточки подряд. Какова вероятность того, что выложится слово ЛИЛИИ?

Решение. Опыт в этой задаче состоит в получении наугад некоторого «слова» из имеющихся пяти букв. Нас интересует вероятность события C = «получено слово ЛИЛИИ». Для выявления равновероятных исходов перенумеруем буквы так: $Л_1$, $Л_2$, $И_1$, $И_2$, $И_3$. Теперь в результате опыта мы будем получать слово из нумерованных букв. События «получено слово $Л_1И_1Л_2И_2И_3$» и «получено слово $Л_2И_1Л_1И_3И_2$» разные, хотя и в том и в другом случае получено слово ЛИЛИИ, т. е. произошло интересующее нас событие C. Выписанные события благоприятствуют событию C. Ясно, что события, выписанные выше, и все возможные аналогичные есть равновероятные исходы нашего опыта. Число их равно числу перестановок в множестве из пяти элементов, т. е. $n = 5! = 120$. Подсчитаем при помощи принципа произведения число исходов, благоприятствующих событию C.

Рассмотрим множество $B = \{(Л_1Л_2); (Л_2Л_1)\}$, состоящее из двух возможных перестановок нумерованных букв Л, и множество A, состоящее из шести перестановок нумерованных букв $И_1И_2И_3$. Каждый исход, благоприятствующий событию C, можно получить так: берем элемент множества B и ставим буквы Л (сохраняя их порядок) на первое и третье места в слове. Оставшиеся места занимаем каким-нибудь элементом множества A (не изменяя порядка нумерованных букв И). Таким образом, каждый исход получается как пара: элемент из B и элемент из A. В силу принципа произведения число таких исходов $m = 2 \cdot 6 = 12$. Вероятность же интересующего нас события

$$P(A) = \frac{12}{120} = 0{,}1.$$

Принцип произведения очевидным образом обобщается на три, четыре и т. д. множества.

Пример 9. В ящике лежат 15 красных, 9 синих и 6 зеленых одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуто: 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара?

Решение. В этой задаче опыт состоит в том, что из ящика вынимают 6 шаров и отмечают, сколько шаров какого цвета. Нас интересует вероятность события A = «вынуто 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара». Для выявления равновероятных исходов перенумеруем все шары: красные — номерами с 1 по 15, синие — номерами с 16 по 24 и зеленые — номерами с 25 по 30. От этого вероятность события A не изменится. Опыт теперь будет состоять в том, что мы вынимаем из ящика 6 шаров и записываем их номера, получается множество из шести номеров, выбранных из множества 30 первых номеров. Ясно, что события «вынуто такое-то подмножество из шести номеров из 30 первых номеров» образуют множество равновероятных исходов рассматриваемого опыта. Действительно, в результате опыта одно из этих событий обязательно происходит; эти события попарно несовместны (поскольку вынуть одновременно набор номеров, например, {1; 3; 15; 21; 23; 30} и {2; 3; 15; 25; 27; 30} невозможно). Эти события равновероятны, так как шары вынимаются наугад и потому для каждого набора номеров шансы быть вынутым одинаковы. Число этих исходов равно числу шестиэлементных подмножеств множества из 30 элементов, т. е. $n = C_{30}^6$. Событию A благоприятствуют такие наборы номеров, в которых есть три номера из первых 15 (это номера красных шаров), два номера из следующих 9 (с 16 по 24) номеров (это номера синих шаров) и один номер из оставшихся 6 (с 25 по 30) номеров (это номера зеленых шаров). Так, из выписанных выше наборов номеров первый благоприятствует событию A, а второй — нет. Три номера из 15 можно выбрать C_{15}^3 способами. Два номера из 9 можно выбрать C_9^2 способами. Один номер из 6 можно выбрать 6 способами. Следовательно, в силу принципа произведения множество исходов, благоприятствующих событию A, будет содержать $m = C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot 6$ элементов. Интересующая же нас вероятность

$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot 6}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} =$$

$$= \frac{24}{145} \approx 0{,}17.$$

Упражнения

1. Являются ли равновероятными следующие события:

а) Опыт — бросок монеты; события: «выпал герб» и «выпала цифра».

б) Опыт — бросок неправильной монеты (погнутой); события: «выпал герб» и «выпала цифра».

в) Опыт — выстрел по цели; события: «промах» и «попадание».

г) Опыт — бросок двух монет; события: A = «выпало два герба», B = «выпало две цифры» и C = «выпали герб и цифра».

д) Опыт — бросок игральной кости; события: A = «выпало не менее трех очков» и B = «выпало не более четырех очков».

е) Опыт — вынимание косточки домино из полного набора 28 косточек; события: A = «вынуто 6», B = «вынуто пусто».

2. Образуют ли события, указанные в упражнениях 1, множество исходов соответствующего опыта?

3. Приведите пример опыта с тремя исходами.

4. Приведите пример опыта, в котором можно указать три попарно несовместных события, не образующих множество исходов опыта.

5. Приведите пример опыта и четырех его событий, таких, чтобы эти четыре события не составляли множество исходов опыта, но одно из них в результате опыта происходит обязательно.

6. При броске игральной кости вычислить вероятности следующих событий:

а) выпало два очка; б) выпало пять очков; в) выпало четное число очков; г) выпало простое число очков; д) число выпавших очков кратно трем.

7. Бросили две монеты. Какова вероятность того, что на одной монете выпал герб, а на другой — цифра?

8. При броске двух игральных костей вычислить вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Полученные результаты изобразить на координатной плоскости, откладывая по оси абсцисс сумму очков, а по оси ординат — вероятность выпадения этой суммы;

б) разность очков равна: 0, 1, 2, 3, 4, 5;

в) сумма выпавших очков больше их произведения.

9. Имеется пять отрезков длиной 1, 3, 4, 7 и 9 см. Определить вероятность того, что из трех наугад взятых отрезков (из этих пяти) можно построить треугольник.

10. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 конгруэнтных кубиков. Определить вероятность того, что наугад выбранный кубик имеет ровно две окрашенные грани.

11. Какова вероятность, что в январе наугад выбранного года окажется пять воскресений?

12. На шести одинаковых карточках написаны буквы А, В, К, М, О, С. Карточки раскладываются наугад в ряд. Какова вероятность, что получится слово МОСКВА?

13. В ящике лежат 31 деталь первого сорта и 6 деталей второго сорта. Наугад вынимают три детали. Чему равна вероятность того, что: а) все три детали первого сорта; б) хотя бы одна из вынутых деталей первого сорта?

14. Слово АГАВА разрезали на буквы и эти буквы выложили наугад в ряд. Какова вероятность того, что опять получилось это же слово?

15. Слово МОЛНИЯ разрезали на буквы, взяли наугад четыре буквы и выложили в ряд. Какова вероятность, что получилось слово МИЛЯ?

16. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наугад берут четыре карточки и выкладывают их в ряд. Какова вероятность того, что получится четное число?

17. Из 28 косточек домино наугад вынимается одна. Найти вероятность следующих событий:

а) на вынутой косточке есть шесть очков;

б) на вынутой косточке есть пятерка или четверка;

в) сумма вынутых очков равна 7.

18. Замок открывается только при наборе шифра — пятизначного номера, который можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Какова вероятность того, что замок откроется, если шифр набран случайно?

19. В ящике лежат 12 белых и 8 красных одинаковых на ощупь шаров.

а) Вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что он белый?

б) Вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что он красный?

в) Вынули наугад два шара. Какова вероятность того, что они разноцветные?

г) Вынули наугад восемь шаров. Какова вероятность того, что ровно три из них красные?

д) Вынули наугад восемь шаров. Какова вероятность того, что красных шаров вынуто не больше трех?

20. В ящике лежат 13 зеленых, 10 красных и 7 синих одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 8 шаров. Какова вероятность того, что вынуто 3 зеленых, 2 красных и 3 синих шара?

21. Какова вероятность элементарного события, если они равновероятны?

22. В лотерее из 7 билетов 2 выигрышных. Семь человек по очереди берут (и не возвращают) по одному билету. Зависит ли вероятность взять выигрышный билет от номера очереди?

23. В лотерее k билетов, один из которых выигрышный. По очереди k человек берут (и не возвращают) по одному билету. Какова вероятность взять выигрышный билет и зависит ли она от номера очереди?

24. В лотерее из k билетов p выигрышных. Поочередно k человек берут (и не возвращают) по одному билету. Какова вероятность взять выигрышный билет?

25. В лотерее из 11 билетов выигрышных 3. Поочередно 5 человек берут (и не возвращают) по одному билету. Какова вероятность взять выигрышный билет?

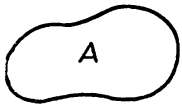


Рис. 1

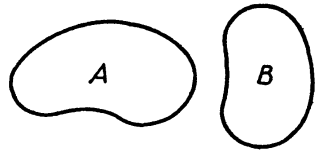


Рис. 2

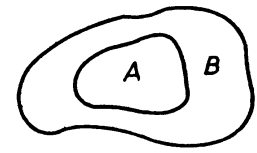


Рис. 3

3. Алгебра событий. Теперь мы переходим к более детальному изучению тех связей, которые могут быть между событиями. Простейшие из них мы уже разобрали: совместные и несовместные события; событие A благоприятствует событию B. Теперь нам предстоит ввести «действия над событиями». При этом свойства этих действий будут во многом походить на свойства действий сложения и умножения в алгебре. После этого с событиями можно будет проводить вычисления почти так же, как это делается в алгебре с числами и выражениями. При этом говорят, что получается «алгебра событий».

Чтобы дальнейшее изложение сделать более наглядным, свяжем его со знакомым вам материалом из теории множеств.

С каждым опытом мы связывали множество его исходов — события $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Каждому событию A в этом опыте благоприятствует некоторое подмножество множества исходов данного опыта. Таким образом, событие A мы можем рассматривать как некоторое подмножество в множестве элементарных событий данного опыта. Это подмножество мы тоже будем обозначать буквой A и изображать обычным образом (рис. 1). Тогда все связи между событиями можно изобразить наглядно. Например, если события A и B несовместны, то это значит, что нет исхода опыта, благоприятствующего и событию A, и событию B, т. е. соответствующие множества A и B не пересекаются (рис. 2). Если событие A благоприятствует событию B, то это значит, что каждый исход опыта, благоприятствующий событию A, благоприятствует и событию B, т. е. соответствующее множество A есть подмножество множества B (рис. 3). Если события A и B совместны, то это значит, что существуют исходы опыта, благоприятствующие как событию A, так и событию B, т. е. соответствующие множества A и B пересекаются (рис. 3, 4). На рисунке 4 изображены совместные события, но ни одно из них не благоприятствует другому.

Теперь остается известные вам соотношения между множествами перенести на события.

Прежде всего вам известно объединение двух множеств. Перенесем это понятие на события. Рассмотрим два события A и B. Это некоторые подмножества исходов опыта. Рассмотрим их объединение $A \cup B$. Оно является некоторым подмножеством исходов опыта, т. е. некоторым событием в этом опыте. Это событие называется объединением событий A и B и обозначается также $A \cup B$. На рисунке 5 объединение событий A и B заштриховано. А как

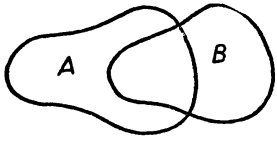


Рис. 4

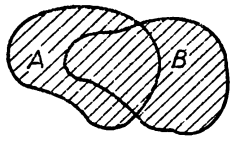


Рис. 5

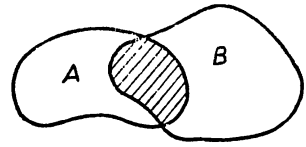


Рис. 6

охарактеризовать объединение событий, пользуясь только терминологией теории вероятностей? Событию $A \cup B$ благоприятствуют исходы опыта, которые благоприятствуют хотя бы одному из рассматриваемых событий. Следовательно, событие $A \cup B$ состоит в том, что произошло хотя бы одно из указанных событий (или A, или B, или A и B одновременно). Ясно, что аналогично рассматривается объединение трех, четырех и вообще любого числа событий. Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение. *Объединением событий A, B, C, ... называется событие, состоящее в том, что в результате опыта произошло хотя бы одно из указанных событий A, B, C, ... Это событие обозначается так:* $A \cup B \cup C \cup \ldots$

Из этого определения непосредственно следуют равенства:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

Рассмотрим примеры объединения событий.

Пример 1. Бросили игральную кость. Событие $Q_{\text{пр}} \cup Q_{\text{н}}$ (см. с 54) состоит в том, что выпало или 1 очко, или 2 очка, или 3 очка, или 5 очков. Можно также записать, что

$$Q_{\text{пр}} \cup Q_{\text{н}} = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_5.$$

Пример 2. Возьмем электрическую цепь, в которую параллельно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть как включен, так и выключен. Рассмотрим события: A = = «включен выключатель 1», B = «включен выключатель 2» и C = = «по цепи идет ток». Тогда при включении этой электрической цепи $C = A \cup B$.

Пример 3. В воскресенье друзья могли пойти смотреть соревнования или по футболу, или по баскетболу, или по волейболу. Рассмотрим события: A = «друзья пошли смотреть соревнования по футболу», B = «друзья пошли смотреть соревнования по баскетболу», C = «друзья пошли смотреть соревнования по волейболу» и D = «друзья пошли смотреть соревнование». Тогда

$$D = A \cup B \cup C.$$

Кроме объединения множеств, рассматривается еще их пересечение. Перенесем и это понятие на события. Рассмотрим два события A и B. Они являются подмножествами исходов опыта (обозначим их тоже A и B). Рассмотрим пересечение $A \cap B$ — оно составляет некоторое подмножество исходов опыта, т. е. некоторое

событие рассматриваемого опыта. Это событие называется пересечением событий A и B и обозначается $A \cap B$. На рисунке 6 заштриховано пересечение событий A и B.

Дадим теперь определение пересечения событий в терминах теории вероятностей. Событию $A \cap B$ благоприятствуют исходы опыта, которые благоприятствуют и событию A, и событию B. Следовательно, событие $A \cap B$ состоит в том, что в результате опыта произошло и событие A, и событие B (т. е. эти события произошли одновременно). Ясно, что аналогично рассматривается пересечение трех, четырех и вообще любого числа событий. Таким образом, мы подошли к определению пересечения событий.

Определение. *Пересечением событий $A, B, C, \ldots$ называется событие, состоящее в том, что в результате опыта произошли все указанные события. Это событие обозначается так:* $A \cap B \cap C \cap \ldots$.

Из этого определения непосредственно следуют формулы:

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

Приведем примеры пересечения событий.

Пример 4. Бросили игральную кость. Событие $Q_{\text{пр}} \cap Q_{\text{н}}$ состоит в том, что выпало или 3 очка, или 5 очков. Это можно записать так:

$$Q_{\text{пр}} \cap Q_{\text{н}} = Q_3 \cup Q_5.$$

Пример 5. Рассмотрим электрическую цепь, в которую последовательно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть как влючен, так и выключен. Рассмотрим события: A = «включен выключатель 1», B = «включен выключатель 2» и C = «по цепи идет ток». Тогда при включении этой электрической цепи $C = A \cap B$.

Пример 6. В воскресенье Петя и Вася договорились пойти на футбол, если Петя купит в субботу билеты, если Вася исправит неудовлетворительную оценку и если в воскресенье не пойдет дождь. Рассмотрим события: A = «Петя купил в субботу билеты на футбол», B = «Вася исправил неудовлетворительную оценку», C = «в воскресенье нет дождя», D = «Петя и Вася пошли в воскресенье на футбол». Ясно, что

$$D = A \cap B \cap C.$$

Таким образом, действия объединения и пересечения обладают *переместительным* и *сочетательным* свойствами и связаны (как и в алгебре) *распределительным* законом:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (1)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (2)$$

Наглядно это видно из рисунков 7 (на котором событие, стоящее в левой части равенства (1), изображено множеством, заштрихо-

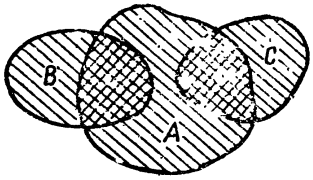


Рис. 7

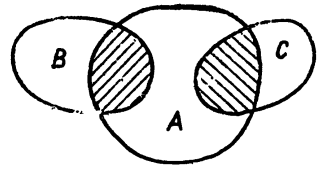


Рис. 8

ванным дважды) и 8 (на котором множество, изображающее событие, стоящее в правой части равенства (1), заштриховано один раз). Ясно, что на этих рисунках отмечено одно и то же множество, т. е. оно изображает одно и то же событие — левая часть равна правой (в равенстве (1)).

Приведем теперь доказательство распределительного закона, не опирающееся на рисунки. Для доказательства равенства (1) возьмем любой исход E_k опыта. Тогда

$$(E_k \subset A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow (E_k \subset A \text{ и } (E_k \subset B \text{ или } E_k \subset C)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (E_k \subset A \text{ и } B \text{ или } E_k \subset A \text{ и } C) \Leftrightarrow (E_k \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)).$$

Этим равенство (1) доказано. Аналогично доказывается и равенство (2).

Теперь мы можем проводить вычисления с событиями почти так же, как в обычной алгебре. Надо только иметь в виду некоторые особенности действий с событиями, например:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

В алгебре несколько особую роль играют числа 0 и 1. Здесь тоже имеются события, играющие аналогичную особую роль. Эти события называются невозможным (обозначается буквой U) и достоверным (обозначается буквой E).

Определение. *Событие называется невозможным, если в результате опыта оно произойти не может. Событие называется достоверным, если оно обязательно происходит в результате опыта.*

Из этого определения ясно, что невозможное событие U есть пустое множество исходов опыта, а достоверное событие E есть множество всех исходов данного опыта. Любое событие изображается подмножеством этого множества.

Для несовместных событий, и только для них,

$$A \cap B = U.$$

Именно так обычно и записывают несовместность событий.

А формулы, сразу следующие из определения U и E,

$$A \cap E = A, \quad A \cup U = A, \quad A \cap U = U$$

показывают, что невозможное событие U играет роль нуля, а достоверное событие E играет роль единицы.

Наряду с объединением событий (это действие играет роль сложения в алгебре) рассматривается еще разность событий.

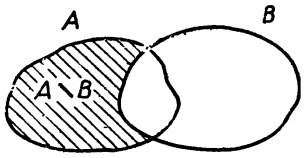


Рис. 9

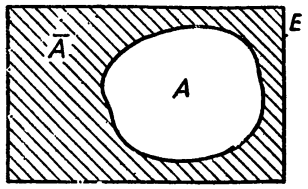


Рис. 10

Определение. *Разностью $A \setminus B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло событие A и не произошло событие B в результате опыта.*

Событию $A \setminus B$ благоприятствуют исходы опыта, которые благоприятствуют событию A и не благоприятствуют событию B. Следовательно, при изображении события $A \setminus B$ из события A надо удалить все исходы, которые благоприятствуют событию B (рис. 9).

Например, $Q_{\text{пр}} \setminus Q_{\text{н}} = Q_2$, $Q_{\text{пр}} \setminus Q_{\text{ч}} = Q_3 \cup Q_5$.

Часто бывает проще вычислить вероятность того, что событие A не произошло. Поэтому введено следующее определение.

Определение. *Событие $\overline{A} = E \setminus A$ называется противоположным событию A или событием «не A»* (рис. 10).

Например, $\overline{Q}_{\text{н}} = Q_{\text{ч}}$.

Упражнения

1. Докажите следующие равенства:

а) $A \cap E = A$;
б) $A \cup U = A$;
в) $A \cap U = U$;
г) $A \cup E = E$;
д) $\overline{U} = E$;
е) $\overline{E} = U$;
ж) $\overline{\overline{A}} = A$;
з) $A \setminus A = U$;
и) $A \setminus E = U$;
к) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
л) $A \cap \overline{A} = U$;
м) $A \cup \overline{A} = E$;
н) $A \subset B \Rightarrow A \setminus B = U$;
о) $A \cap B \subset A$;
п) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
р) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
с) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
т) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_k$;
у) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_k$;
ф) $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = U$;
х) $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$.

2. Верно ли, что $(A \cup B = C) \Rightarrow (A = C \setminus B)$?

3. Всегда ли для событий A и B $A = (A \cup B) \setminus B$? Приведите (на рисунках) примеры, когда это верно и когда это неверно.

4. Докажите, что $(B \subset A) \Rightarrow (A = B \cup (A \setminus B))$.

5. Всегда ли для событий A, B и C $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$? Приведите примеры (на рисунках), когда это верно и когда это неверно.

6. Может ли быть: а) $A \setminus B = A$? б) $A \setminus B = U$? в) $A \setminus B = B$?

7. Расшифруйте запись: а) $\bigcup_{i=1}^{5} A_i$; б) $\bigcup_{k=2}^{4} A_k$.

8. Запишите короче: а) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{51}$;
б) $A_2 \cup A_5 \cup A_8 \cup \ldots \cup A_{32}$.

9. Опыт состоит в бросании двух монет — медной и серебряной. Рассматриваются следующие события:

A = «герб выпал на медной монете»;
B = «цифра выпала на медной монете»;
C = «герб выпал на серебряной монете»;
D = «цифра выпала на серебряной монете»;
M = «выпал хотя бы один герб»;
F = «выпала хотя бы одна цифра»;
G = «выпал и один герб и одна цифра»;
H = «невыпадение ни одного герба»;
K = «выпало два герба».

Каким событиям из этого списка соответствуют следующие записи: 1) $A \cup C$; 2) $A \cap C$; 3) $M \cap F$; 4) $G \cup M$; 5) $G \cap M$; 6) $B \cap D$; 7) $M \cup K$?

10. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_k = «попадание при k-м выстреле», $k = 1, 2, 3$. Пользуясь действиями над событиями A_k и $\overline{A}_k$, записать события:

A = «все три попадания»;
B = «все три промаха»;
C = «хотя бы одно попадание»;
D = «хотя бы один промах»;
M = «не меньше двух попаданий»;
F = «не более одного попадания»;
G = «попадание в мишень не раньше третьего выстрела».

11. В поле наблюдения микроскопа находятся четыре клетки. За время наблюдения каждая из них может как разделиться, так и не разделиться. Рассматриваются события:

A = «разделилась ровно одна клетка»;
B = «разделилась хотя бы одна клетка»;
C = «разделилось не менее двух клеток»;
D = «разделились ровно две клетки»;
M = «разделились ровно три клетки»;
F = «разделились все четыре клетки».

В чем состоят события: 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \cup C$; 4) $B \cap C$; 5) $D \cup M \cup F$; 6) $B \cap F$? Верны ли равенства: 7) $B \cap F = C \cap F$; 8) $B \cap C = D$?

12. Назовите противоположные события для событий:

A = «выпадение двух гербов при бросании двух монет»;
B = «появление белого шара при вынимании одного шара из урны, в которой лежат белые, черные и красные шары»;
C = «три попадания при трех выстрелах»;
M = «не более двух попаданий при пяти выстрелах»;
D = «хотя бы одно попадание при пяти выстрелах»;
F = «выигрыш первого игрока при игре в шахматы».

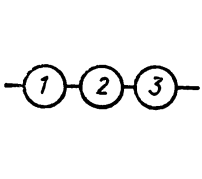


Рис. 11

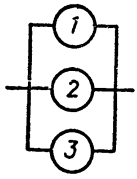


Рис. 12

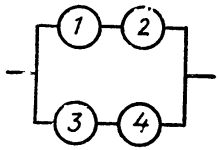


Рис. 13

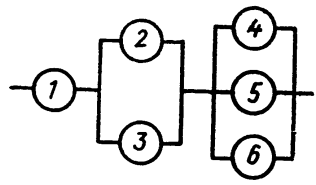


Рис. 14

13. На рисунках 11, 12, 13 и 14 изображены электрические схемы. Выключатели изображены кружками, в которых указан номер выключателя. Через события A_k = «включен выключатель с номером k» записать следующие события для каждой схемы: A = «ток идет» и $\bar{A}$ = «ток не идет».

4. Теоремы о вероятности объединения. Теперь можно перейти к теоремам, при помощи которых по вероятностям одних случайных событий вычисляется вероятность других случайных событий, как-либо связанных с первыми. Простейшая из этих теорем — теорема сложения.

Теорема 1. ***Если $A \cap B = U$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.***

Доказательство. Пусть множество исходов рассматриваемого опыта состоит из n равновероятных исходов. Если m из них благоприятствуют событию A, то $P(A) = \frac{m}{n}$. Если k из них благоприятствуют событию B, то $P(B) = \frac{k}{n}$. Поскольку события A и B несовместны, то нет исходов, благоприятствующих одновременно и событию A, и событию B. Следовательно, событию $A \cup B$ благоприятствует $m + k$ исходов, и потому

$$P(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Пример 1. В ящике лежат 7 белых, 5 красных и 8 синих одинаковых на ощупь шаров. Вынимается наугад один шар. Какова вероятность того, что он цветной?

Решение. Рассмотрим события: K = «вынут красный шар» и C = «вынут синий шар». Это несовместные события, а нас интересует событие «вынут цветной шар» = «вынут красный или синий шар» = $K \cup C$. Следовательно, по теореме 1

$$P(K \cup C) = P(K) + P(C) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = 0{,}65.$$

В этом примере проще обойтись без теоремы 1, но в ряде случаев (как это вы увидите ниже) проще сослаться на эту теорему.

Теорема 1 доказана для классического случая. В общем же случае это одно из основных свойств вероятности события — оно входит в качестве одной из аксиом. Поясним, пользуясь понятием

частоты события, естественность этого свойства вероятности события.

Пусть опыт, в котором могут произойти несовместные события A и B, повторили N раз. При этом событие A произошло M раз, а событие B — K раз. Но частота появления события связана с его вероятностью приближенными равенствами $\frac{M}{N} \approx P(A)$ и $\frac{K}{N} \approx P(B)$. Так как события A и B несовместны, то событие $A \cup B$ при рассмотренном повторении опыта произошло $M + K$ раз. Следовательно,

$$P(A \cup B) \approx \frac{M+K}{N} = \frac{M}{N} + \frac{K}{N} \approx P(A) + P(B).$$

Поскольку точность этих приближенных равенств может быть сделана любой (за счет увеличения числа опытов N), то для вероятностей (которые от N не зависят), естественно, получается равенство

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пример 2. Зачет по стрельбе считается сданным, если курсант получает оценку не ниже 4. Какова вероятность сдачи зачета курсантом, если известно, что он получает за стрельбу оценку 5 с вероятностью 0,3 и оценку 4 с вероятностью 0,5.

Решение. События A = «по стрельбе получена оценка 5» и B = «по стрельбе получена оценка 4» несовместны. Поскольку нас интересует событие «зачет сдан» = $A \cup B$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

Может возникнуть вопрос: откуда известны вероятности получения оценок по стрельбе? Ответ — из опыта предыдущих стрельб.

Теорема 1 обобщается на любое число попарно несовместных событий.

Теорема 2. ***Если события A_1, A_2, ..., A_k попарно несовместны, то***

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k).$$

Доказательство. При $k = 2$ получаем теорему 1. Проведем доказательство для k событий по индукции. Предположим, что при $k = s$ теорема верна, и докажем, что она тогда верна и при $k = s + 1$. Для доказательства рассмотрим пересечение

$$A_{s+1} \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) =$$
$$= (A_{s+1} \cap A_1) \cup (A_{s+1} \cap A_2) \cup \ldots \cup (A_{s+1} \cap A_s) = U,$$

поскольку события $A_{s+1} \cap A_i = U$ при $i = 1, 2, \ldots, s$ в силу их несовместности. Следовательно, события A_{s+1} и $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s)$ несовместны и в силу теоремы 1:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s \cup A_{s+1}) = P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) \cup A_{s+1}) =$$
$$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s) + P(A_{s+1}) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_s) + P(A_{s+1}).$$

Последнее равенство написано в силу сделанного предположения, что при $k = s$ теорема верна.

По принципу математической индукции отсюда следует, что утверждение теоремы 2 верно для любого натурального k.

Установим теперь очень важную связь между вероятностями противоположных событий.

Теорема 3. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Доказательство. Так как $A \cap \bar{A} = U$ и $A \cup \bar{A} = E$, а $P(E) = 1$, то $1 = P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Отсюда следует формула.

Пример 3. Наудачу берется трехзначное число. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры будут различны?

Решение. Исход этого опыта — получение натурального числа от 100 до 999. Так как числа выбираются наугад, то эти исходы равновероятны. Их число $n = 900$. Нас интересует событие A = «у выбранного числа совпадают хотя бы две цифры». Но проще подсчитать вероятность события $\bar{A}$ = «у выбранного числа все цифры различны». Каждое такое число есть упорядоченное подмножество из трех цифр в множестве из десяти цифр. При этом на первом месте не может быть нуля. Следовательно, число таких чисел $m = A_{10}^3 - A_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 9^2 \cdot 8$.

$$P(\bar{A}) = \frac{9^2 \cdot 8}{900} = 0{,}72.$$

Интересующая же нас вероятность $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}28$.

Выведем формулу для вероятности объединения двух любых событий (не обязательно несовместных).

Теорема 4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Доказательство. Сначала докажем, что

$$P(H \setminus M) = P(H) - P(M), \text{ если } M \subset H. \qquad (1)$$

Действительно, в этом случае $H = M \cup (H \setminus M)$. А так как эти события M и $(H \setminus M)$ несовместны, поскольку

$$M \cap (H \setminus M) = (M \cap H) \setminus (M \cap M) = M \setminus M = U,$$

то по теореме 1

$$P(H) = P(M \cup (H \setminus M)) = P(M) + P(H \setminus M),$$

откуда следует формула (1).

Теперь докажем основную формулу. Так как $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ и события A и $(B \setminus (A \cap B))$ несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, поскольку $A \cap B \subset B$ (и можно применить формулу (1)).

Обратите внимание на то, что только теорема 1 доказывалась с использованием классического определения вероятности события. Все же остальные теоремы доказаны с использованием ссылки на теорему 1. Поскольку теорема 1 имеет место в любой ситуации,

то и все остальные доказанные теоремы тоже сохраняются в любой вероятностной ситуации.

Упражнения

1. Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку — с вероятностью 0,2 и в восьмерку — с вероятностью 0,6. Найти вероятности следующих событий (после одного выстрела):
A = «выбито не менее восьми очков»,
B = «выбито более восьми очков».

2. Вывести формулу для $P(A \cup B \cup C)$ в общем случае.

3. В ящике лежат 8 белых и 12 красных одинаковых на ощупь шаров.

а) Наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что хоть один из них окажется белым?

б) Наугад вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что среди них окажется не более одного белого шара?

в) Наугад вынимают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди них окажется не менее двух белых шаров?

г) Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что они одного цвета?

4. В день физкультурника Петя пошел на стадион. Можно было купить билеты на соревнование по футболу с вероятностью 0,3, или купить билеты на соревнования по баскетболу с вероятностью 0,4, или купить билеты на соревнования по волейболу с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что Петя попал на соревнование? Какова вероятность того, что Петя попал на соревнование, в котором запрещена игра ногой?

5. В ящике лежат 8 красных, 10 зеленых и 12 синих одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают три шара. Какова вероятность того, что на вынутых шарах будет отсутствовать хоть бы один из цветов?

6. В мастерской работает три станка. За смену первый станок может потребовать наладки с вероятностью 0,15, второй станок — с вероятностью 0,1 и третий станок — с вероятностью 0,12. Считая, что станки не могут одновременно потребовать наладки, найти вероятность того, что за смену хоть один станок потребует наладки.

5. **Независимость событий.** В обиходе часто говорят о независимых событиях. При этом нередко приходят к разногласию: одни считают какие-то два события независимыми, а другие — зависимыми. Чтобы этого положения избежать, в теории вероятностей принято следующее определение независимости двух событий.

Определение. *События A и B называются независимыми, если*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Попробуем теперь разобраться в том, как это определение согласуется с нашей интуицией.

Пример 1. Бросили монету и игральную кость. Какова вероятность того, что выпадет герб и четное число очков.

Здесь опыт состоит в том, что брошена монета и игральная кость, и мы смотрим, что выпало на монете и сколько очков выпало на кости. Наша интуиция подсказывает, что число выпавших очков не зависит от того, что выпало на монете, т. е. события $Г$ = «на монете выпал герб» и $Q_ч$ = «на кости выпало четное число очков» независимы. Подсчитаем теперь вероятности этих событий в нашем опыте, вероятность их пересечения $Г \cap Q_ч$, и проверим, согласуется ли это с определением независимых событий.

Для подсчета вероятностей выделим множество равновероятных исходов нашего опыта. Очевидно, что события $Г \cap Q_k$ и $Ц \cap Q_k$ ($Ц$ = «на монете выпала цифра»), $k = 1, 2, \ldots, 6$, есть множество исходов нашего опыта. Эти события равновероятны, поскольку условия опыта симметричны относительно них, шансы произойти у этих событий равны. Число их $n = 12$. Шесть из них благоприятствуют тому, что выпал герб. Это события $Г \cap O_k$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Следовательно,

$$P(Г) = \frac{1}{2}.$$

Событию $Q_ч$ благоприятствуют тоже шесть исходов: $Г \cap Q_k$ и $Ц \cap Q_k$, $k = 2, 4, 6$. Следовательно,

$$P(Q_ч) = \frac{1}{2}.$$

Пересечению $Г \cap Q_ч$ благоприятствует три исхода: $Г \cap Q_k$, $k = 2, 4, 6$. Следовательно,

$$P(Г \cap Q_ч) = \frac{1}{4}.$$

Поскольку $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(Г)\,P(Q_ч)$, то мы видим, что в этом примере интуитивное представление о независимости двух событий и данное выше определение согласованы.

Проследим теперь за аналогичным согласованием в несколько более общей обстановке.

Пусть имеются два несвязанных опыта S и s (например, бросок монеты и бросок игральной кости). Мы производим оба опыта одновременно. Очевидно, что естественно их считать независимыми вместе с происходящими в них событиями, т. е. если событие A может произойти в опыте S, а событие B может произойти в опыте s, то естественно считать, что эти события независимы. В результате одновременного осуществления опытов S и s может произойти как событие A, так и событие B и их пересечение $A \cap B$, т. е. эти события могут произойти одновременно. Посмотрим, как здесь будут связаны между собой вероятности событий A, B и их пересечения $A \cap B$.

Здесь мы рассматриваем сложный опыт, состоящий в том, что произведены одновременно не связанные друг с другом два опыта S и s. Выявим равновероятные исходы этого сложного опыта. Для этого рассмотрим равновероятные исходы опыта S — события E_1, E_2, ..., E_n и равновероятные исходы опыта s — события e_1, e_2, ..., e_k. В результате сложного опыта обязательно происходит одно из событий $E_i \cap e_j, i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., k$. Эти события-произведения попарно несовместны, поскольку несовместны попарно E_i и несовместны попарно e_j. События $E_i \cap e_j$ есть исходы нашего сложного опыта. Но это равновероятные события. Действительно, поскольку E_i равновероятны и e_j равновероятны, то условия сложного опыта симметричны относительно событий $E_i \cap e_j$ — у всех их равны шансы на то, чтобы произойти в нашем сложном опыте.

Таким образом, мы имеем nk равновероятных исходов сложного опыта.

Пусть событию A благоприятствуют исходы E_1, E_2, ..., E_m опыта S. Тогда в сложном опыте событию A благоприятствуют исходы $E_i \cap e_j$, где $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., k$. Их mk, и потому

$$P(A) = \frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}.$$

Отметим попутно, что вероятность события A как в опыте S, так и в сложном опыте одна и та же.

Пусть событию B благоприятствуют исходы e_1, e_2, ..., e_l опыта s. Тогда в сложном опыте событию B благоприятствуют исходы $E_i \cap e_j$, где $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$. Их nl, и потому

$$P(B) = \frac{nl}{nk} = \frac{l}{k}.$$

Пересечению $A \cap B$ в сложном опыте благоприятствуют исходы $E_i \cap e_j$, где $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., l$. Их ml, и потому

$$P(A \cap B) = \frac{ml}{nk} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{k} = P(A)\,P(B).$$

Мы видим, что и в этой, более общей ситуации интуиция и определение двух независимых событий совпадают.

Пример 2. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по зайцу. Заяц подстрелен, если попал хоть один охотник. Вычислить вероятность того, что заяц подстрелен, если вероятности попаданий для охотников равны 0,8 и 0,75.

Решение. Подсчитаем вероятность противоположного события — «заяц не подстрелен» $= \overline{A}$. Обозначим события: B = «попадание первого охотника», C = «попадание второго охотника». Из условия примера следует, что эти события независимы и их вероятности таковы: $P(B) = 0{,}8$, $P(C) = 0{,}75$. Поскольку $\overline{A} = \overline{B} \cap \overline{C}$ и события эти тоже независимы, то

$$P(\overline{A}) = P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{B})\,P(\overline{C}) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05$$

и потому

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}95.$$

Как видите, несмотря на то что охотники не очень меткие, совместные их действия должны быть более удачными.

Пример 3. Докажем, что если события A и B независимы, то и события $\overline{A}$ и B тоже независимы.

Решение. Поскольку

$$\overline{A} \cap B = (E \setminus A) \cap B = B \setminus (A \cap B) \text{ и } A \cap B \subset B,$$

то

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)\,P(B) = P(B)\,(1 - P(A)) = P(B)\,P(\overline{A}),$$

так как события A и B независимы по условию.

Естественно, что не обязательно рассматривать разные опыты. Можно один и тот же опыт повторить независимым образом, т. е. при повторении ничего не меняя в зависимости от результатов предыдущего опыта.

Пример 4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность попадания в цель хоть один раз при двух выстрелах?

Решение. Положим, A = «попадание при первом выстреле» и B = «попадание при втором выстреле». По условию $P(A) = P(B) = 0{,}8$ и события A и B независимы. Нас интересует событие $A \cup B$. Подсчитаем вероятность противоположного события $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Поскольку события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ тоже независимы и $P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = 0{,}2$, то

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}96.$$

Можно рассматривать несколько независимых событий или опытов.

Определение. *События A, B, C, ... называются независимыми,*[1] *если вероятность пересечения равна произведению вероятностей для любого подмножества указанных событий.*

Обратите внимание на то, что это определение не сводится к попарной независимости перечисленных событий. Для того чтобы, например, три события были бы независимыми, надо, чтобы для любой пары событий вероятность пересечения равнялась произведению вероятностей и чтобы пересечение всех трех событий имело вероятность, равную произведению вероятностей событий. Чтобы немного разобраться в этом, рассмотрим следующий пример.

Пример 5. Имеется однородная правильная треугольная пирамида. Ее грани окрашены следующим образом: одна грань

[1] Часто говорят: «События A, B, C, ... независимы в совокупности».

красная, вторая — зеленая, третья — желтая, а четвертая грань разбита на три треугольника: один окрашен в красный цвет, другой — в желтый, а третий — в зеленый. Пирамиду бросают на стол и смотрят, «выпал ли заданный цвет», т. е. присутствует ли интересующий нас цвет на грани, на которую упала пирамида.

Интуитивно ясно, что три события: $К$ = «выпал красный цвет», $Ж$ = «выпал желтый цвет» и $З$ = «выпал зеленый цвет» — не независимы, поскольку одна из граней окрашена всеми тремя цветами. Посмотрим теперь, как это интуитивное представление согласовано с данным выше определением.

Для выявления равновероятных исходов этого опыта перенумеруем грани пирамиды следующим образом: грань, окрашенную в красный цвет, — номером 1, в желтый цвет — номером 2, в зеленый цвет — номером 3, и грань, окрашенную всеми тремя цветами, номером 4. Ясно, что четыре события A_k = «выпала грань с номером k» есть равновероятные исходы рассматриваемого опыта. Подсчитаем вероятности событий. Событию $К$ благоприятствуют два исхода: A_1 и A_4. Поэтому $P(К) = 0{,}5$. Аналогично получаем, что $P(Ж) = 0{,}5$ и $P(З) = 0{,}5$. Каждому из событий $К \cap Ж$, $К \cap З$, $Ж \cap З$ и $К \cap Ж \cap З$ благоприятствует только один исход A_4, т. е. вероятности этих событий равны 0,25. Таким образом,

$$P(К \cap Ж \cap З) = 0{,}25 \neq P(К)\,P(Ж)\,P(З) = 0{,}125.$$

Обратите внимание на то, что любая пара событий из $К$, $Ж$ и $З$ независима — вероятность их произведения равна произведению их вероятностей, а все три события не независимы. Это очень важное замечание, показывающее, что нельзя делать заключения типа: «так как каждая пара из рассматриваемых событий независима, то и все события независимы».

Пример 6. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,5. Какова вероятность хотя бы одного попадания при десяти независимым образом проведенных выстрелах?

Решение. Введем события A_k = «попадание при k-м выстреле». По условию эти события независимы, и $P(A_k) = \frac{1}{2}$ при любом k. Нас интересует вероятность их объединения. Но проще подсчитать вероятность противоположного события:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10}} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{10}.$$

Поскольку события $\overline{A}_k$ тоже независимы и $P(\overline{A}_k) = \frac{1}{2}$, то

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{10}) = P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Следовательно, вероятность интересующего нас события равна:

$$1 - 2^{-10} \approx 0{,}999.$$

В этом примере тоже стоит обратить внимание на то, что, хотя стрелок и неметкий, вероятность попадания равна 1/2, но при 10 выстрелах уже почти наверняка будет хоть одно попадание. Про такие события говорят, что они практически достоверны. Вероятность того, что все 10 раз будет промах около 0,001, очень мала. События с подобными вероятностями практически произойти не могут. Про них говорят, что они практически невозможны.

Упражнения

1. Бросили монету и игральную кость. Какова вероятность, что при этом на монете выпал герб, а число выпавших на кости очков четно?

2. Из полного набора костей домино наугад вынута косточка и брошена игральная кость. Какова вероятность того, что на игральной кости выпало простое число очков, а на косточке домино число очков делится на три?

3. Два станка работают независимо один от другого. Вероятность того, что первый станок проработает смену без наладки, равна 0,9. Для второго станка эта вероятность равна 0,8. Какова вероятность того, что оба станка проработают смену без наладки? Какова вероятность того, что за смену и первый и второй станок потребуют наладки?

4. События A и B независимы. Доказать, что независимы $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

5. События A, B и C независимы. Доказать, что независимы $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$.

6. События A и B независимы. Найти формулы для $P(A \cup B)$.

7. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,75, для третьего — 0,7.

а) Какова вероятность хоть одного попадания?

б)* Какова вероятность ровно одного попадания?

в)* Какова вероятность ровно двух попаданий?

8. При изготовлении детали проводится четыре операции. Вероятность получения брака после каждой операции равна 0,01. Какова вероятность выпуска детали без брака, если операции независимы?

6. Геометрические вероятности. До сих пор мы рассматривали вероятностные задачи, в которых опыты имеют *конечное* множество исходов. Но гораздо чаще приходится иметь дело с опытами, в которых множество исходов *бесконечно*. Дадим некоторое представление о таких ситуациях на простейших геометрических задачах теории вероятностей — они приводят к так называемому геометрическому определению вероятности события.

Начнем с простейших примеров.

Пример 1. Пусть на отрезок длиной l бросают наудачу точку. Какова вероятность того, что эта точка попадет на отрезок

длиной s, являющийся частью отрезка длины l (рис. 15)?

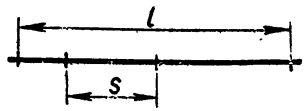


Рис. 15

Наглядные представления о вероятности события наталкивают нас на такие соображения. Если $s = \frac{1}{2}l$, то естественно искомую вероятность положить равной $\frac{1}{2}$; если $s = \frac{1}{3}l$, то равной $\frac{1}{3}$ и т. д. В общем случае для события A = «точка попала на отрезок длиной s» естественно положить

$$P(A) = \frac{s}{l}. \qquad (1)$$

Это равенство раскрывает смысл выражения «точка брошена наудачу».

В этом примере рассматриваемый опыт — бросок точки на отрезок — имел бесконечное множество исходов: точка может попасть в любую точку отрезка. Поэтому классический подход, рассмотренный в предыдущих пунктах, тут уже неприемлем.

Пример 2. Пусть на тот же отрезок длиной l бросают одновременно (независимо одну от другой) две точки. Какова вероятность того, что обе эти точки попадут на отрезок $[a, b]$ длиной s, являющийся частью отрезка длиной l (рис. 15)?

Рассмотрим координатную прямую и отрезок длиной l на ней. Пусть x — координата первой брошенной точки, y — координата второй брошенной точки. Событие A = «первая точка попала на отрезок $[a; b]$» по условию не зависит от события B = «вторая точка попала на отрезок $[a; b]$». Поэтому в силу определения независимости событий A и B вероятность того, что обе точки попали на отрезок $[a; b]$, равна:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{s}{l} \cdot \frac{s}{l} = \frac{s^2}{l^2}.$$

Посмотрим теперь на это решение немного с другой стороны. В результате проделанного опыта нами получена упорядоченная пара чисел $(x; y)$ — координаты первой и второй точек. Но тогда можно говорить о точке на плоскости с этими координатами. Событие, состоящее в том, что обе брошенные точки попали на отрезок $[a; b]$, равносильно тому, что точка с координатами $(x; y)$ попала в заштрихованный на рисунке 16 квадрат. Вероятность же этого события, подсчитанная выше, есть отношение площадей двух квадратов — заштрихованного площадью s^2 и большого квадрата площадью l^2, куда вообще может

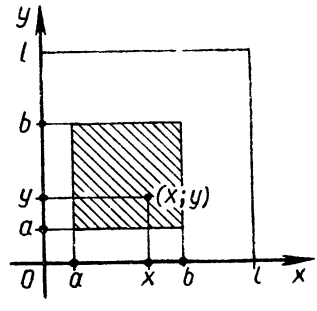


Рис. 16

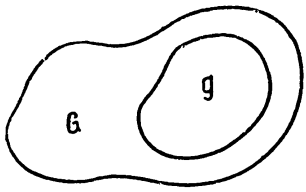


Рис. 17

попасть точка с координатами $(x; y)$ (по условию задачи $0 \leqslant x \leqslant l$ и $0 \leqslant y \leqslant l$).

Сделанное замечание подводит к такому определению вероятности события. Пусть на плоскости имеется некоторая фигура G. В ней выделена фигура g (рис. 17). В фигуру G наугад бросают точку. Тогда вероятность события A =«точка попала в фигуру g» равна отношению площадей фигур G и g, т. е.

$$P(A) = \frac{S(g)}{S(G)}. \qquad (2)$$

В этом и заключается смысл выражения «точка брошена наудачу в фигуру G».

Пример 3. Два человека договорились о встрече. Условия встречи следующие: в условленное место они приходят независимо друг от друга в произвольный момент времени между 13.00 и 14.00. Придя, каждый ожидает не более получаса и уходит не позднее 14.00. Какова вероятность того, что они встретятся?

Решение. Пусть время (в часах) прихода одного $13 + x$, а второго — $13 + y$. Это событие изобразим точкой на плоскости с координатами $(x; y)$. Так как время прихода каждого произвольно, то $(x; y)$ есть точка, наудачу брошенная в квадрат (рис. 18), поскольку в соответствии с принятыми обозначениями $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Какую же фигуру заполняют точки, соответствующие событию A = «встреча состоялась»? Для встречи необходимо и достаточно, чтобы

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{2}, \text{ или } x - \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{2}.$$

На рисунке 19 интересующая нас фигура заштрихована. Так как площадь квадрата (это в нашей задаче есть фигура G) равна 1, то искомая вероятность равна площади заштрихованной фигуры (это в нашей задаче фигура g), т. е. равна $\frac{3}{4}$.

Итак, вероятность встречи равна $\frac{3}{4}$.

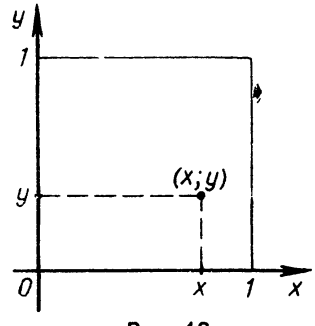


Рис. 18

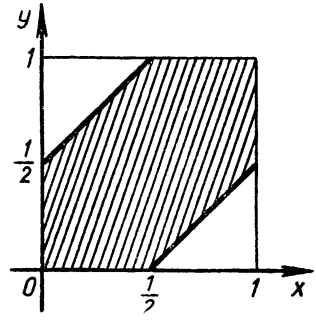


Рис. 19

Пример 4. На отрезок длиной 1 наудачу бросают две точки. Они разбивают отрезок на три меньших отрезка. Какова вероятность того, что из полученных отрезков можно построить треугольник?

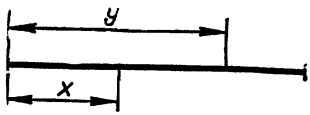


Рис. 20

Решение. Обозначим расстояния брошенных точек от левого конца отрезка через x и y, $x \leqslant y$ (рис. 20). Тогда длины полученных отрезков будут: x, $y-x$ и $1-y$. Рассмотрим на плоскости точку с координатами $(x; y)$. Так как точки бросали на отрезок произвольно, то $(x; y)$ есть точка, наудачу брошенная на плоскость. Поскольку для ее координат выполнены неравенства $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, то точка $(x; y)$ наудачу брошена в треугольник ABO (рис. 21). Для того чтобы из отрезков длиной x, $y-x$ и $1-y$ можно было построить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства треугольника: длина каждой стороны меньше суммы длин двух остальных сторон:

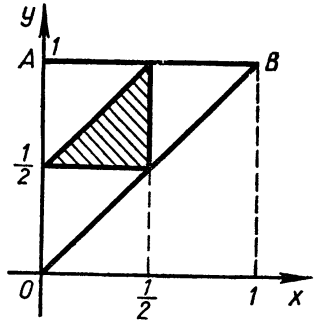


Рис. 21

$$x \leqslant 1-x,\ y-x \leqslant 1-y+x,\ 1-y \leqslant y.$$

Этими неравенствами на плоскости задается заштрихованный на рисунке 21 треугольник. Его площадь равна $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABO. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.

Упражнения

1. Доказать теорему 1 из п. 4 для геометрического определения вероятности события.

2. На плоскости проведен пучок параллельных прямых на равных расстояниях l. На плоскость наудачу бросается отрезок длиной l. Какова вероятность того, что этот отрезок пересекается с одной из прямых?

3. Мины поставлены на прямой через каждые 15 м. Танк шириной 3 м идет перпендикулярно этой прямой. Какова вероятность того, что он подорвется?

4. На окружности радиуса R зафиксирована точка A. Какова вероятность того, что случайно выбранная точка на окружности отстоит от точки A меньше чем на R?

5. В окружность наудачу вписывают треугольник. Какова вероятность того, что он остроугольный?

6. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что эта точка попадет в квадрат?

7. В окружность вписан правильный треугольник. В круг наугад бросают точку. Какова вероятность того, что она попадет в треугольник?

8. В окружность наугад вписывают треугольник. Какова вероятность того, что он прямоугольный?

9. В окружность наугад вписывают треугольник. Какова вероятность того, что он равнобедренный?

10. Три человека договорились о встрече. Условия встречи следующие: в назначенное место каждый приходит независимо от других между 13.00 и 14.00. Пришедший ожидает не более получаса и уходит, если нет хотя бы одного из встречающихся. Позднее 14.00 никто не остается. Какова вероятность того, что они встретятся?

11. В шар вписан куб. Точка бросается наугад в шар. Какова вероятность того, что она попадет в куб?

7. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Многие задачи в теории вероятностей сводятся к следующей схеме, которая называется схемой Бернулли. В некотором опыте нас интересует событие A. Нам известна его вероятность $P(A) = p$. Опыт повторяют n раз независимым образом. Какова вероятность того, что в результате n независимых повторений опыта событие A произойдет ровно m раз, $0 \leqslant m \leqslant n$? Эту вероятность принято обозначать P_{mn}. Ответ на поставленный вопрос дает формула Бернулли:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p. \quad (1)$$

Для доказательства этой формулы перенумеруем все опыты номерами с первого по n-й. Введем события A_k = «в опыте с номером k произошло событие A». Из постановки задачи следует, что $P(A_k) = p$ при любом k и введенные события независимы, поскольку опыт повторяется независимым образом. Нас интересует событие $B_{m,n}$ = «в результате осуществления схемы Бернулли событие A произошло ровно m раз» и его вероятность. Если событие A произошло в опытах с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$, а в опытах с остальными номерами $i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n$ не произошло, то это есть событие

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap \overline{A}_{i_{m+1}} \cap \overline{A}_{i_{m+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}, \quad (2)$$

а его вероятность в силу независимости событий A_k равна:

$$P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_m}) P(\overline{A}_{i_{m+1}}) P(\overline{A}_{i_{m+2}}) \ldots P(\overline{A}_{i_n}) = p^m q^{n-m}. \quad (3)$$

Если произойдет хоть одно из событий вида (2), то произойдет событие $B_{m,n}$. Следовательно,

$$B_{m,n} = \bigcup (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap \overline{A}_{i_{m+1}} \cap \overline{A}_{i_{m+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}). \quad (4)$$

При этом в объединение входят события-пересечения, у которых $\{i_1; i_2; \ldots, i_m\}$ есть любое m-элементное подмножество множества $\{1; 2; \ldots; n\}$; (а $\{i_{m+1}; i_{m+2}; \ldots; i_n\}$ — подмножество оставшихся но-

меров). Число таких подмножеств равно C_n^m, и это есть число событий, входящих в объединение (4). Эти события попарно несовместны. Действительно, разным событиям соответствуют разные множества $\{i_1; i_2; \ldots; i_m\}$, т. е. они отличаются хоть одним элементом k. Поэтому одно произведение имеет вид $A_k \cap (\ldots)$, а другое — вид $\overline{A}_k \cap (\ldots)$. Следовательно, $(A_k \cap (\ldots)) \cap (\overline{A}_k \cap (\ldots)) = A_k \cap \overline{A}_k \cap (\ldots) = U$ — события несовместны. Но тогда по теореме о вероятности суммы попарно несовместных событий $P(B_{m,n})$ равна сумме вероятностей событий, входящих в объединение (4). Вероятность каждого по формуле (3) равна $p^m q^{n-m}$, их число равно C_n^m, следовательно,

$$P_{m,n} = P(B_{m,n}) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Формула Бернулли доказана.

Пример 1. Какова вероятность того, что при десяти бросках игральной кости 3 очка выпадут ровно 2 раза?

Решение. Здесь $n = 10$, $m = 2$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = \frac{5}{6}$ и

$$P(B_{2,10}) = C_{10}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 0{,}29.$$

Подсчитывать приходится при помощи логарифмической линейки или при помощи таблиц. Однако при больших n и m такие подсчеты затруднительны. Поэтому для соответствующих расчетов используются приближенные формулы. Поскольку мы с этими приближенными формулами не знакомимся, то приводящиеся ниже задачи не содержат больших чисел, но по ним вполне можно понять практические приложения изложенного выше.

Пример 2. Имеются две столовые (с одинаковым числом мест). Десять человек идут одновременно обедать. Каждый из обедующих может пойти в любую из этих столовых с вероятностью 1/2 и независимо от выбора столовой остальными. По скольку мест надо иметь в каждой столовой, чтобы вероятность того, что пришедший обедать не будет стоять в очереди, была больше 0,8? Найти число мест в столовых подбором.

Решение. Из условия ясно, что если в каждой столовой будет по 10 мест, то очереди не будет. Но это число мест с большим запасом. Посмотрим, что получится, если в каждой столовой будет по 5 мест. Нас интересует вероятность события A = «в обеих столовых нет очереди». Введем события A_k = «в столовую №1 пришло k человек». Так как $A = A_5$, то достаточно вычислить вероятность события A_5. При этом можно воспользоваться формулой Бернулли. Здесь опыт состоит в том, что каждый из идущих обедать с вероятностью 1/2 выбирает для обеда столовую № 1. И все эти 10 опытов по условию задачи проводятся независимо. Следовательно, по формуле Бернулли при $p = \frac{1}{2} = q$ имеем:

$$P(A_k) = P_{k,10} = C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = C_{10}^k : 1024$$

и

$$P(A) = P(A_5) = C_{10}^5 : 1024 = 252 : 1024 \approx 0{,}25.$$

Таким образом, иметь по 5 мест в столовых мало.

Попробуем рассмотреть случай, когда в каждой столовой по 7 мест. Тогда

$$A = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7.$$

Действительно, если произошло событие A_3, то это значит, что в столовую № 1 пришли 3 человека (здесь очереди нет), а в столовую № 2 пришли 7 человек (и там очереди нет). Следовательно, произошло событие A. Аналогично рассматриваются и остальные события, входящие в объединение: если произошло хотя бы одно из них, то произошло событие A. В самом деле, остальные события $A_k \not\subset A$. Например, если произошло событие A_2, то это значит, что в столовую № 1 пришли 2 человека, но тогда в столовую № 2 пришли 8 человек и там образовалась очередь — событие A не произошло. Поскольку указанные в объединении события попарно несовместны, то

$$P(A) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) =$$

$$= \frac{C_{10}^3}{1024} + \frac{C_{10}^4}{1024} + \frac{C_{10}^5}{1024} + \frac{C_{10}^6}{1024} + \frac{C_{10}^7}{1024} = \frac{912}{1024} \approx 0{,}89.$$

Таким образом, по 7 мест иметь в столовых достаточно.

Посмотрим, а нельзя ли обойтись шестью местами:

$$A = A_4 \cup A_5 \cup A_6,$$

$$P(A) = P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = \frac{C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6}{1024} = \frac{672}{1024} \approx 0{,}66.$$

Видим, что шести мест в столовых недостаточно.

Итак, в столовых должно быть по 7 мест.

Приведем еще упрощенную схему изучения вероятностей ситуации, называемую «случайное блуждание точки по прямой». Она была рассмотрена А. Н. Колмогоровым в статье «Введение в теорию вероятностей и комбинаторику» (Математика в школе, 1968, № 2).

Из школьного курса физики вы знакомы с броуновским движением. Оно было открыто в 1827 г. ботаником Р. Броуном при наблюдении под микроскопом цветочной пыльцы, взвешенной в воде. Самое тщательное устранение внешних воздействий не прекратило это движение. Опыты показали, что это общее свойство всех достаточно мелких частиц, взвешенных в жидкости.

На рисунке 22 точками отмечены положения частицы через равные промежутки времени. Последовательные положения соединены отрезками. Полученная ломаная дает упрощенное представление о пути, пройденном частицей. В действительности же этот путь

представляет собой гораздо более сложную линию.

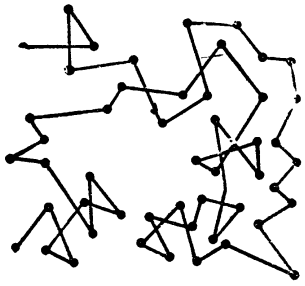


Рис. 22

Объяснение этого явления вам известно из физики. А мы сейчас познакомимся с его упрощенной схемой.

Пример 3. Пусть точка движется по прямой, отправляясь из начала координат, так, что за секунду ее координата может или увеличиться на h с вероятностью $\frac{1}{2}$, или уменьшиться на h с вероятностью $\frac{1}{2}$. Выясним, как меняется координата точки за n секунд, если ежесекундные изменения координаты независимы.

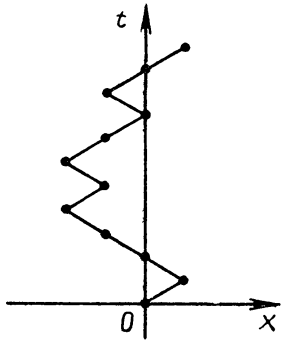


Рис. 23

Если координатную прямую, по которой движется точка, расположить горизонтально, а на вертикальной координатной прямой откладывать время движения точки, то схематически можно изобразить возможные траектории движения (рис. 23). Не исключен случай, что точка будет двигаться только вправо, но вероятность этого очень мала при больших n — она равна $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. В общем же случае за n секунд координата точки m раз увеличится на h, а в оставшихся $n - m$ случаях уменьшится на h. Вероятность этого события по формуле Бернулли равна:

$$P_{m,\,n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n C_n^m.$$

На рисунках 24, 25 и 26 приведены графики этих вероятностей как функции m при разных n, (по горизонтальной координатной оси отложена координата точки, а по вертикальной — вероятность того, что через n, секунд точка имеет эту координату). Из этих рисунков видно, что вероятнее всего точка окажется около начала

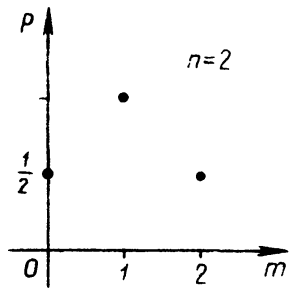


Рис. 24

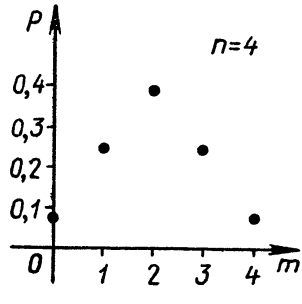


Рис. 25

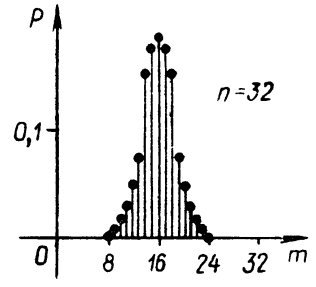


Рис. 26

координат, т. е. приблизительно $\frac{n}{2}$ раз координата увеличится и $\frac{n}{2}$ раз — уменьшится. Подсчеты показывают, что с увеличением n доля чисел m, для которых $P_{m,n}$ в сумме дают больше $\frac{1}{2}$, уменьшается и они группируются около $\frac{n}{2}$.

Например, при $n = 16$ уже при трех номерах ($m = 7$, 8 и 9, т. е. около шестой части всех номеров) вероятности дают:

$$P_{7,16} + P_{8,16} + P_{9,16} = \frac{1}{2^{16}}(C_{16}^{8} + 2C_{16}^{7}) = 0{,}54 > 0{,}5.$$

А при $n = 41$ уже при четырех номерах ($m = 19$, 20, 21, 22), т. е. менее десятой части всех номеров, вероятности дают:

$$\frac{1}{2^{41}}(C_{41}^{19} + C_{41}^{20} + C_{41}^{21} + C_{41}^{22}) = 0{,}5.$$

Теоретический подсчет показывает, что эта доля номеров убывает как $\sqrt{\frac{1}{n}}$.

Упражнения

1. Какова вероятность того, что при 10 бросках игральной кости три очка выпадут ровно три раза; ровно один раз?

2. В формуле Бернулли при фиксированных p и n найдите наибольшее значение вероятности $P_{m,n}$. Докажите, что до m_0 эти вероятности возрастают, а после — убывают.

3. Какова вероятность того, что при 10 бросках игральной кости три очка выпадут не более трех раз?

4. Какова вероятность того, что при 10 бросках игральной кости число очков, кратное трем, появится ровно три раза; не более трех раз; ровно четыре раза?

5. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный результат исключается): 1) три партии из четырех или пять из восьми? 2) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

6. Дать ответ к упражнению 6 из п. 4 в предположении, что станки требуют наладки независимо один от другого (и могут останавливаться одновременно).

8. **Случайные величины.** Часто встречаются опыты, результат которых есть случайно получающееся число. Например, при броске игральной кости мы случайным образом получаем одно из чисел 1, 2, ..., 6. При измерениях тоже случайным образом получаются числа — ошибки измерения, которые нельзя прогнозировать. В подобных случаях говорят, что мы имеем дело со случайной величиной. Случайные величины принято обозначать греческими буквами ξ (кси), η (эта), ζ (дзета) и т. п. Знакомство со случайными

величинами мы начнем с самых простых опытов, которые допускают конечное множество исходов. На примере с броском игральной кости мы видим, что каждому исходу опыта Q_k ставится в соответствие единственное число k — значение случайной величины. Поэтому естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов данного опыта. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Случайной величиной называется функция, заданная на множестве исходов данного опыта.*

Это значит, что каждому исходу опыта E_k поставлено в соответствие единственное число x_k, которое называется значением случайной величины ξ на исходе E_k, и пишут $\xi(E_k) = x_k$. При этом некоторые из чисел x_k могут совпадать. Если же все значения случайной величины совпадают: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$, то говорят, что рассматриваемая случайная величина есть постоянная, и пишут $\xi = a$. Чаще всего указанное соответствие задается при помощи таблицы:

Исходы	E_1	E_2	...	E_k	...	E_n
ξ	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n

(1)

или короче:

Исходы	...	E_k	...
ξ	...	x_k	...

(2)

Со случайными величинами, рассматриваемыми в одном и том же опыте, обращаются, как с обычными функциями. Так, сумма случайной величины ξ, заданной таблицей (2), и случайной величины η, заданной таблицей:

Исходы	...	E_k	...
η	...	y_k	...

(3)

есть случайная величина, которую обозначают $\xi + \eta$ и которая задается таблицей:

Исходы	...	E_k	...
$\xi + \eta$	...	$x_k + y_k$	...

(4)

Аналогичное положение с разностью, произведением и частным (для частного надо только потребовать, чтобы все значения знаменателя — случайной величины η — были отличны от нуля):

Исходы	.	E_k	
$\xi - \eta$	...	$x_k - y_k$	...
$\xi\eta$	...	$x_k \cdot y_k$	...
$\frac{\xi}{\eta}$	...	$\frac{x_k}{y_k}$	...

(5)

Часто приходится иметь дело с функциями от случайных величин. Получаются сложные функции от исходов опыта, т. е. опять случайные величины. Функция f от случайной величины ξ есть случайная величина, задаваемая таблицей:

Исходы	...	E_k	..
$f(\xi)$	...	$f(x_k)$	...

(6)

Во многих вопросах для изучения случайной величины бывают достаточны ее простейшие характеристики: математическое ожидание и дисперсия.

Определение. *Математическим ожиданием случайной величины, задаваемой таблицей (1), в опыте с равновероятными исходами называется число*

$$M\xi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{7}$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины есть «некоторое среднее ее значений».

Пример 1. Для случайной величины ξ, заданной таблицей:

Исходы	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ	—3	10	0	5	—3	—1	—3	5	1	—3

в опыте с равновероятными исходами вычислить $M\xi$.

Решение. $M\xi = \frac{1}{10}(-3 + 10 + 0 + 5 - 3 - 1 - 3 + 5 + 1 - 3) = 0{,}8$.

Докажем некоторые свойства математических ожиданий.

Теорема 1. ***M (aξ+b)=aM ξ+b, a и b—постоянные.***

Доказательство. Если случайная величина ξ задана таблицей (1) в опыте с равновероятными исходами, то случайная величина $a\xi + b$ в том же опыте задается таблицей:

Исходы	...	E_k	...
$a\xi + b$	...	$ax_k + b$	...

И в силу определения — формулы (7) — имеем:

$$M(a\xi + b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b) = \frac{1}{n}\left(a\sum_{k=1}^{n}x_k + nb\right) =$$

$$= a\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) + b = aM\xi + b.$$

Теорема 2. ***Если a и b—постоянные, то Maξ = aMξ, Mb = b.***

Доказательство следует из теоремы 1: первая формула получается при $b = 0$, а вторая — при $a = 0$.

Теорема 3. $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

Доказательство. Пусть случайные величины ξ и η заданы таблицами (1) и (3) в опыте с равновероятными исходами. Тогда случайная величина $\xi + \eta$ в том же опыте задается таблицей:

Исходы	...	E_k	...
$\xi + \eta$	...	$x_k + y_k$	...

Отсюда по определению математического ожидания — формула (7) — получаем:

$$M(\xi + \eta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k = M\xi + M\eta.$$

Из теоремы 3 по индукции сразу получается, что для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ верна формула

$$M\left(\sum_{i=1}^{r}\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{r}M\xi_i. \qquad (8)$$

Упражнения

Случайные величины заданы в опыте с равновероятными исходами таблицей:

Исходы	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ_1	7	—2	1	—5	3	—2	1	—2	0	1
ξ_2	5	—1	—7	0	10	4	—1	0	5	3
ξ_3	—6	—2	5	3	5	—2	0	5	1	0
ξ_4	—7	4	6	0	—5	4	—7	0	—3	4
ξ_5	10	0	7	—5	0	10	—5	1	—5	0

Найти: 1) $M\,\xi_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
2) $M\,(2\xi_1 + 3)$;
3) $M\,(5 - 3\,\xi_2)$;
4) $M\,(\xi_4 + \xi_5)$;
5) $M\,(\xi_2 - \xi_4)$;
6) $M\,(2\xi_1 - 5\xi_2)$;
7) $M\,(3\xi_1 + 2\xi_2 - 5\xi_3 - \xi_4 + 7)$.

9. Закон распределения случайной величины. Оказывается, для вычисления математического ожидания случайной величины не обязательно знать всю таблицу (1). Об этом говорит следующая теорема о вычислении математического ожидания.

Теорема 1. ***Пусть события A_1, A_2, ..., A_r попарно несовместны, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r = E$ и $\xi(E_i) = a_k$ при $E_i \subset A_k$. Тогда***

$$M\xi = \sum_{k=1}^{r} a_k p_k, \text{ где } p_k = P(A_k). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть первые (для простоты рассуждений) m_1 исходов $E_1, E_2, \ldots, E_{m_1}$ благоприятствуют событию A_1, т. е. $p_1 = \frac{m_1}{n}$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m_1} = a_1$. Так как события A_1 и A_2 несовместны, то ни один из исходов $E_1, E_2, \ldots, E_{m_1}$ не благоприятствует событию A_2. Ему благоприятствуют другие исходы. Пусть это будут следующие (для простоты рассуждений) m_2 исходов:

$$E_{m_1+1}, E_{m_1+2}, \ldots, E_{m_1+m_2}, \text{ т. е. } p_2 = \frac{m_2}{n},$$

$$x_{m_1+1} = x_{m_1+2} = \ldots = x_{m_1+m_2} = a_2.$$

И так далее для всех событий A_k. Напишем математическое ожидание случайной величины ξ и перегруппируем слагаемые в сумме:

$$M\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\left((x_1 + x_2 + \ldots + x_{m_1}) + (x_{m_1+1} + x_{m_1+2} + \ldots +\right.$$

$$+ x_{m_1+m_2}) + \ldots) = \frac{1}{n}(m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots) = a_1 \frac{m_1}{n} + a_2 \frac{m_2}{n} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} a_k p_k.$$

Теорема полностью доказана.

Подчеркнем, что из формулировки теоремы следует, что

$$\sum_{k=1}^{r} p_k = 1, \quad 0 < p_k \leqslant 1. \tag{2}$$

Из теоремы 1 следует, что для вычисления математического ожидания случайной величины достаточно знать только числа a_k и p_k. Условия теоремы можно записать в виде таблицы:

События	A_1	A_2	...	A_r
ξ	a_1	a_2	...	a_r
p	p_1	p_2	...	p_r

(3)

Обычно первую строку этой таблицы, содержащую попарно несовместные события A_k, не выписывают, и таблица получает вид:

ξ	a_1	a_2	...	a_r
P	p_1	p_2	...	p_r

или короче

ξ	...	a_k	...
P	...	p_k	...

(4)

Однако надо помнить, что каждый столбец в этой таблице относится к некоторому событию, эти события попарно несовместны и в результате опыта одно из этих событий обязательно происходит.

Таблица (4), достаточная для вычисления математического ожидания случайной величины, называется *законом распределения* случайной величины.

Обычно числа a_k в этой таблице берутся разными, но это не обязательно.

Формула (1) для вычисления математического ожидания случайной величины была нами выведена в предположении, что исходы опыта равновероятны. В более сложных случаях эта формула принимается как определение математического ожидания случайной величины с законом распределения (4).

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины с законом распределения:

ξ	1	0
P	p	q

$q = 1 - p.$

Р е ш е н и е. По формуле (1) получаем: $M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$.

П р и м е р 2. Даны s одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, т. е. все они имеют один и тот же закон распределения:

ξ_j	1	0
P	p	q

$q = 1 - p$,
$j = 1, 2, \ldots, s$.

Найти математическое ожидание их суммы и среднего арифметического.

Р е ш е н и е. В силу примера 1 $M\xi_j = p$ при $j = 1, 2, \ldots, s$. Тогда по формуле (8) (с. 91) имеем:

$$M\left(\sum_{j=1}^{s} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{s} M\xi_j = sp.$$

Отсюда в силу теоремы 2 (с. 91) получаем:

$$M\left(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} \xi_j\right) = \frac{1}{s} M\left(\sum_{j=1}^{s} \xi_j\right) = \frac{1}{s} \cdot sp = p. \qquad (5)$$

Для дальнейшего удобно будет обозначать через $(\xi = a)$ событие, состоящее в том, что в результате опыта случайная величина ξ приняла значение, равное a; через $(\xi > a)$ — событие, состоящее в том, что случайная величина ξ в результате опыта приняла значение, большее a, и т. п.

Упражнения

1. Случайные величины заданы таблицей на странице 92.

Написать закон распределения для случайных величин, считая исходы опыта равновероятными. Написать закон распределения случайной величины $\xi_4 \cdot \xi_5$.

2. Доказать, что $M(\xi - M\xi) = 0$.

3. Записать через исходы опыта $(\xi_1 = -2)$.

4. Записать через исходы опыта $(\xi_2 > 0)$.

5. Записать через исходы опыта $(\xi_3 \leqslant 0)$.

6. Записать через исходы опыта $(-5 \leqslant \xi_4 < 4)$.

7. Записать через исходы опыта $(-10 \leqslant \xi_5 < -5)$.

8. Случайная величина ξ имеет закон распределения:

ξ	0	—3	0	1	—3	0	—3
P	0,15	0,1	0,07	0,2	0,2	0,08	

Заполните в таблице пустую клеточку. Запишите закон распределения случайной величины ξ так, чтобы в первой строке все числа были бы различны (не повторялись, как в данной таблице).

10. Независимые случайные величины. Фундаментальную роль в теории вероятностей играет понятие независимых случайных величин.

Определение. *Две случайные величины* ξ *и* η *с законами распределения*

ξ	...	a_i	...
P	...	p_i	...

и

η	...	b_j	...
P	...	p'_j	...

(1)

называются независимыми, если при любых i *и* j

$$P((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) = P(\xi = a_i)\, P(\eta = b_j). \tag{2}$$

Например, опыт состоит в бросании двух игральных костей — синей и красной. Случайная величина ξ есть количество очков, выпавшее на синей кости. Случайная величина η есть количество очков, выпавшее на красной кости. Интуитивно ясно, что это независимые случайные величины. Посмотрим теперь, как наша интуиция согласована с введенным определением.

Выпишем законы распределения случайных величин ξ и η:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

η	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Так как при любых $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$P((\xi = i) \cap (\eta = j)) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(\xi = i)\, P(\eta = j),$$

то эти случайные величины независимы.

Теорема 1. ***Если случайные величины*** ξ ***и*** η ***независимы, то***

$$M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta.$$

Доказательство. Запишем законы распределения (1) случайных величин ξ и η так, чтобы все a_i были различны и все b_j были бы различны. Тогда

$$P(\xi = a_i) = p_i, \quad P(\eta = b_j) = p_j$$

и в силу независимости ξ и η при любых i и j

$$P((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) = P(\xi = a_i)\, P(\eta = b_j) = p_i p'_j.$$

События $A_{ij} = (\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)$ (взятые для любых возможных сочетаний номеров i и j) удовлетворяют условиям теоремы 1 (п. 9). Действительно, они попарно несовместны, так как, например, при $i \neq l$ $a_i \neq a_l$ в силу записи закона распределения случайной величины ξ. И поэтому $(\xi = a_i) \cap (\xi = a_l) = U$. Следовательно, $A_{ij} \cap A_{lk} = ((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) \cap ((\xi = a_l) \cap (\eta = b_k)) = ((\xi = a_i) \cap (\xi = a_l)) \cap (\ldots) = U$.

Далее, поскольку $\bigcup\limits_i (\xi = a_i) = E$ и $\bigcup\limits_j (\eta = b_j) = E$ (так как в законах распределения выписаны все возможные значения случайной величины), то, перегруппировывая слагаемые, получаем:

$$\bigcup_{ij} A_{ij} = \bigcup_{i,j} ((\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)) = ((\xi = a_1) \cap \bigcup_j (\eta = b_j)) \cup$$
$$\cup ((\xi = a_2) \cap \bigcup_j (\eta = b_j)) \cup \ldots = ((\xi = a_1) \cap E)) \cup ((\xi = a_2) \cap$$
$$\cap E)) \cup \ldots = \bigcup_i (\xi = a_i) = E.$$

И наконец, если исход опыта $E_s \subset A_{ij} = (\xi = a_i) \cap (\eta = b_j)$, то $\xi\eta$ имеет значение $a_i b_j$. Поэтому закон распределения имеет вид:

$\xi\eta$	...	$a_i b_j$	...
P	...	$p_i p'_j$	...

Откуда, пользуясь формулой (1) из п. 9, после преобразований получаем доказательство теоремы:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i,j} (a\, b_j) \cdot (p_i p'_j) = a_1 p_1 \sum_j b_j p'_j + a_2 p_2 \sum_j b_i p'_j + \ldots =$$
$$= a_1 p_1 M\eta + a_2 p_2 M\eta + \ldots = M\eta \cdot \sum_i a_i p_i = M\eta \cdot M\xi.$$

Если математическое ожидание случайной величины дает нам точку, «вокруг которой разбросаны» значения случайной величины, то «степень этого разброса» характеризуется дисперсией.

Определение. *Дисперсией случайной величины* ξ *называется число*

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Пример 1. Вычислить дисперсию случайной величины примера 1 из п. 9.

Решение. Так как $M\xi = p$ и $q = 1 - p$, то закон распределения случайной величины $\xi - M\xi = \xi - p$ будет:

$\xi - M\xi$	q	$-p$
P	p	q

а закон распределения ее квадрата $(\xi - M\xi)^2$ будет:

$(\xi - M\xi)^2$	q^2	p^2
P	p	q

Из полученного закона распределения следует, что

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = q^2p + p^2q = pq(q + p) = pq.$$

Теорема 2. ***Для попарно независимых случайных величин***

$$D\left(\sum_i \xi_i\right) = \sum_i D\,\xi_i.$$

Доказательство. Мы докажем эту теорему, пользуясь формулой, выведенной в упражнении 2.

$$D\left(\sum_i \xi_i\right) = M\left(\sum_i \xi_i\right)^2 - \left(M\left(\sum_i \xi_i\right)\right)^2 \overset{(1)}{=}$$

$$= M\left(\sum_i \xi_i^2 + 2\sum_{i<j} \xi_i\,\xi_j\right) - \left(\sum_i M\,\xi_i\right)^2 \overset{(1)}{=}$$

$$= \sum M\,\xi_i^2 + 2\sum_{i<j} M(\xi_i\,\xi_j) - \sum_i (M\,\xi_i)^2 - 2\sum_{i<j} M\xi_i \cdot M\,\xi_j \overset{(2)}{=}$$

$$= \sum_i (M\,\xi_i^2 - (M\,\xi_i)^2) + 2\sum_{i<j} M\xi_i \cdot M\xi_j - 2\sum_{i<j} M\,\xi_i \cdot M\xi_j = \sum_i D\,\xi_i$$

((1) по правилу возведения суммы в квадрат и по формуле (8) из п. 8; (2) так как случайные величины попарно независимы, то в силу теоремы 1).

Теорема 3. ***$D(a\xi) = a^2 D\xi$, где a — постоянная.***

Доказательство. По определению дисперсии и теореме 2 (п. 8) имеем:

$$D(a\,\xi) = M(a\,\xi - M(a\,\xi))^2 = M(a\,\xi - aM\,\xi)^2 = M\,a^2(\xi - M\xi)^2 = a^2 M(\xi - M\,\xi)^2 = a^2 D\,\xi.$$

Пример 2. Пусть случайные величины в примере 2 из п. 9 попарно независимы. Найти дисперсию их суммы и среднего арифметического.

Решение. В силу примера 1 при любом i имеем: $D\xi_i = pq$. Поэтому в силу теоремы 2

$$D\left(\sum_{i=1}^{s} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{s} D\xi_i = spq.$$

Отсюда в силу теоремы 3 получаем:

$$D\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} \xi_i\right) = \frac{1}{s^2} D\left(\sum_{i=1}^{s} \xi_i\right) = \frac{1}{s^2}(spq) = \frac{pq}{s}.$$

Обсудим подробнее последний пример. Он очень важен для практических выводов из теории вероятностей. Представим себе, что мы проводим измерения длины. Истинная длина равна a. Каждое измерение содержит некоторые ошибки — получается не число a, а некоторое его приближение. Обозначим результат i-го измерения через ξ_i. Это некоторая случайная величина, поскольку ошибки в измерениях обычно случайны. Если нет систематической ошибки при измерении, то $M\xi_i = a$. Попробуем представить себе, что такое дисперсия. Для этого рассмотрим упрощенную схему измерений: при каждом измерении может быть допущена ошибка или h, или $-h$, $h > 0$, и обе ошибки равновероятны, т. е. для ошибки измерения $\xi_i - a$ — это случайная величина, получается закон распределения:

$\xi_i - a$	h	$-h$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Тогда квадрат этой случайной величины имеет закон распределения:

$(\xi_i - a)^2$	h^2	h^2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Поэтому при любом i

$$D\xi_i = h^2 \cdot \frac{1}{2} + h^2 \cdot \frac{1}{2} = h^2.$$

Таким образом, в этой упрощенной схеме ошибка измерения и дисперсии $D\xi_i$ очень просто связаны:

$$\sqrt{D\xi_i} = h.$$

Эта связь в некотором смысле сохраняется и в общем случае: $\sqrt{D\xi_i}$ характеризует ошибку сделанного измерения.

Теперь, посмотрев на результат решения примера 2, легко понять, почему измерений делают много и берут среднее арифметическое полученных результатов. Результат каждого измерения— случайная величина. Измерения делают обычно так, что их результаты — случайные величины— можно считать попарно независимыми. Но тогда ошибки этих измерений — дисперсии соответствующих случайных величин — складываются. Поэтому ошибка среднего арифмегического измерений будет, в силу полученной при решении примера 2 формулы для дисперсии среднего арифметического случайных величин, в $\sqrt{n}$ раз меньше ошибки каждого измерения (как корень квадратный из дисперсии среднего арифметического).

Таким образом, при увеличении числа независимых измерений точность их среднего арифметического повышается.

Упражнения.

1. Доказать, что дисперсия постоянной равна нулю.
2. Доказать, что $D\,\xi = M\,\xi^2 - (M\,\xi)^2$.
3. Доказать, что $D\,(\xi + b) = D\,\xi$ при любой постоянной b.
4. Для случайных величин, заданных на странице 92, вычислите:

а) $D(3 - 2\,\xi_1)$; б) $D(\xi_2 + \xi_3)$ и сравните с $D\xi_2 + D\xi_3$.

11. Предельные теоремы теории вероятностей. Перейдем теперь к группе теорем, которые устанавливают связь между развитой теорией и практикой. Эта связь будет менее схематична, нежели показанная выше. Первая из этой серии теорем была открыта на рубеже XVII и XVIII вв. (опубликовна в 1713 г.) швейцарским ученым Якобом Бернулли (1654 — 1705 гг.). Данное им доказательство было чрезвычайно сложно. Позднее трудами многих математиков оно было сильно упрощено. Главную роль в приводимом ниже доказательстве играет неравенство, открытое в конце прошлого века нашим великим математиком Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894 гг.).

Теорема 1 (неравенство Чебышева). ***Если случайная величина $\xi \geqslant 0$ и постоянная $a > 0$, то***

$$P(\xi \geqslant a) \leqslant \frac{M\xi}{a}.$$

Доказательство. Пусть случайная величина ξ имеет закон распределения (4) из п. 9. Тогда событие $(\xi \geqslant a)$ состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий $(\xi = a_i)$, где i таково, что $a_i \geqslant a$, т. е.

$$(\xi \geqslant a) = \bigcup_{i,\, a_i \geqslant a} (\xi = a_i)$$

(в объединении учитываются только те номера i, для которых выполнено неравенство $a_i \geqslant a$). Будем опять предполагать, что все a_i различны. Тогда события $(\xi = a_i)$ попарно несовместны и

$$P(\xi \geqslant a) = P\Big(\bigcup_{i,\, a_i \geqslant a} (\xi = a_i)\Big) =$$

$$= \sum_{i,\, a_i \geqslant a} P(\xi = a_i) = \sum_{i,\, a_i \geqslant a} p_i \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{i,\, a_i \geqslant a} p_i \frac{a_i}{a} = \frac{1}{a} \sum_{i,\, a_i \geqslant a} a_i p_i \overset{(2)}{\leqslant} \frac{1}{a} \sum_i a_i p_i = \frac{1}{a} M\xi$$

((1) так как $p_i > 0$ и $\frac{a_i}{a} \geqslant 1$ в силу условия на номера i; (2) складываем уже все возможные слагаемые без всяких ограничений, при этом могут добавиться некоторые слагаемые, от чего сумма не уменьшится).

Две следующие теоремы обычно объединяются под общим названием закона больших чисел.

Теорема 2 (Бернулли). ***Рассмотрим опыт, в котором может произойти событие A с вероятностью p. Этот опыт повторяется независимым образом n раз. Событие A при этом происходит m раз. Тогда для любого числа $a>0$***

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)=0.$$

Доказательство основано на неравенстве Бернулли:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{pq}{a^2n}, \tag{1}$$

Для вывода этого неравенства определим n случайных величин ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, следующим образом: $\xi_i=1$, если в опыте с номером i произошло событие A, и $\xi_i=0$ во всех остальных случаях. Поскольку опыты проводятся независимым образом, то все эти случайные величины независимы. Кроме того, они одинаково распределены и имеют закон распределения:

ξ_i	1	0
P	p	q

$q=1-p$,
$i=1, 2, \ldots, n$.

Заметим еще, что

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i=m. \tag{2}$$

Действительно, после n опытов событие A произошло m раз (например, в первых m опытах, номера которых 1, 2, ..., m), а в остальных опытах (с номерами $m+1$, $m+2$, ..., n) событие A не произошло. Тогда $\xi_1=1$ (так как событие A произошло в опыте с номером 1), $\xi_2=1$ (так как событие A произошло в опыте с номером 2) и т. д., $\xi_m=1$ (так как событие A произошло в опыте с номером m), а $\xi_{m+1}=0$ (так как в опыте с номером $m+1$ событие A не произошло), $\xi_{m+2}=0$ (так как событие A в опыте с номером $m+2$ не произошло) и т. д., $\xi_n=0$ (так как в опыте с номером n событие A не произошло). Таким образом, в сумме (2) ровно m слагаемых равны 1, а остальные слагаемые равны 0. Поэтому вся сумма равна m.

Введем еще случайную величину:

$$\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i=\frac{m}{n}.$$

Из примера 3 следует, что $M\xi=p$. Поэтому

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant a\right)\overset{(1)}{=}P\left(|\xi-M\xi|\geqslant a\right)\overset{(2)}{=}$$

$$=P\left((\xi-M\xi)^2\geqslant a^2\right)\overset{(3)}{\leqslant}\frac{1}{a^2}M(\xi-M\xi)^2\overset{(4)}{=}\frac{1}{a^2}D\xi\overset{(5)}{=}\frac{pq}{a^2n}$$

((1) так как $\frac{m}{n}=\xi$ и $p=M\xi$;

(2) так как в скобках стоят эквивалентные неравенства;
(3) по неравенству Чебышева для случайной величины $(\xi-M\xi)^2$;
(4) по определению дисперсии;
(5) в силу примера 2 из п. 10).

Из доказанного неравенства (1) следует утверждение теоремы.

Наглядно смысл этой теоремы можно себе представить следующим образом. На практике обычно пренебрегают не только невозможными событиями, но и событиями, вероятность которых мала. Про такие события говорят, что они практически невозможны. Например, если вы пренебрегаете событиями, вероятность которых меньше 0,01 (говорят еще: вероятность меньше 1%), то говорят, что надежность ваших рассуждений равна 99%. Аналогичный смысл имеет утверждение «рассуждения проведены с надежностью в 95%» — это значит, что события, вероятности которых меньше 0,05, считаются практически невозможными и ими пренебрегают.

Утверждение теоремы состоит, например, в том, что для достаточно большого числа опытов частота появления события (число $\frac{m}{n}$) практически не отличается от его вероятности. Это значит, что, делая достаточно много опытов, можно с любой надежностью и с любой точностью считать, что $p\approx\frac{m}{n}$.

Неравенство (1), дающее надежность в зависимости от числа опытов n, очень грубое. В математической статистике имеется ряд теорем, дающих более точные оценки этой надежности.

Пример 1. Игральную кость бросили 1200 раз. Оценить вероятность того, что число выпадений трех очков отличается от 200 больше чем на 60.

Решение. В этом примере $n=1200$; интересующее нас событие — выпадение трех очков — имеет вероятность $p=\frac{1}{6}$. При решении удобно в неравенстве (1) положить $a=\frac{b}{n}$ и переписать его в виде

$$P\left(|m-np|\geqslant b\right)\leqslant\frac{npq}{b^2}. \tag{3}$$

Тогда $np=200$, $b=60$, и мы получаем:

$$P\left(|m-200|\geqslant 60\right)\leqslant\frac{1200\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{60^2}=\frac{5}{108}<0{,}05.$$

Практически это означает следующее: с надежностью в 95% в результате разбираемого опыта число появлений трех очков будет заключено между 140 и 260.

Коротко про неравенство (3) говорят, что оно дает оценку для отклонения числа m от числа np — числа наиболее вероятного появления события.

Отметим еще, что если мы будем вести рассуждения с надежностью $1-c$ $(0<c<1)$, то естественно потребовать выполнения неравенства $\frac{npq}{b^2} \leqslant c$. Если взять $b = \sqrt{\frac{pq}{c}}\sqrt{n}$, то написанное неравенство будет удовлетворено. Про такие b говорят, что они имеют порядок $\sqrt{n}$. Например, при 10 000 опытах отклонения имеют порядок нескольких сотен.

Следующая теорема является обобщением теоремы Бернулли и называется законом больших чисел в форме Чебышева.

Теорема 3 (Чебышева). ***Если случайные величины*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ***попарно независимы и*** $D\xi_n \leqslant C$ ***для всех*** n, ***то при любом*** $a>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| \geqslant a\right) = 0.$$

Доказательство. Введем случайную величину:

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

В силу теоремы 2 и формулы (8) из п. 8 имеем:

$$M\eta_n = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i,$$

а в силу попарной независимости случайных величин и теоремы 2 из п. 10

$$D\eta_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i \leqslant \frac{1}{n^2}(Cn) = \frac{C}{n}, \qquad (4)$$

поскольку $D\xi_i \leqslant C$ для всех i по условию теоремы, так что

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| \geqslant a\right) \overset{(1)}{=} P(|\eta_n - M\eta_n| \geqslant a) \overset{(2)}{=}$$

$$= P((\eta_n - M\eta_n)^2 \geqslant a^2) \overset{(3)}{\leqslant} \frac{1}{a^2}M(\eta_n - M\eta_n)^2 = \frac{1}{a^2}D\eta_n \overset{(4)}{\leqslant} \frac{C}{a^2 n}$$

((1) по определению η_n;
(2) так как неравенства, стоящие в скобках, равносильны;

(3) по неравенству Чебышева;
(4) в силу неравенства (4)).

Таким образом, получено неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{C}{a^2n},$$

из которого следует утверждение теоремы.

Наглядный смысл этого неравенства и утверждения теоремы состоит в следующем: для всех достаточно больших n вероятность

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|\geqslant a\right)$$

мала. Поэтому неравенство

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|\geqslant a$$

практически невозможно, т. е. практически достоверно противоположное неравенство

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right|<a. \tag{5}$$

Следовательно, с любой точностью (т. е. с точностью до произвольно выбранного числа $a>0$ в неравенстве (5)) и практически достоверно (т. е. с любой надежностью) для всех достаточно больших n имеем приближенное равенство

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i.$$

Важность теоремы Чебышева для практики можно проиллюстрировать еще и таким примером. Представьте себе, что вы измеряете какую-то длину. При этом неизбежны ошибки измерения, обусловленные случайными помехами. Следовательно, результат каждого измерения есть некоторая случайная величина, а результат n измерений есть серия случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Естественно предположить, что все измерения делаются независимо друг от друга, т. е. полученные случайные величины попарно независимы. Математическое ожидание каждой случайной величины есть та длина l, которую мы измеряем (при этом предполагается, что при измерении нет систематических ошибок, т. е., например, в нашем распоряжении правильная линейка). Ошибка каждого измерения характеризуется дисперсией получающейся при этом случайной величины. Очевидно, что все ошибки ограничены — ясно, что

ошибок, в два раза больших измеряемой величины, не будет. Таким образом, при измерениях обычно выполнены условия теоремы Чебышева, и потому с любой точностью и достоверностью для всех достаточно больших n имеем:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \approx l.$$

Неравенство, полученное при доказательстве теоремы Чебышева, может быть уточнено: при широких предположениях, если $D\xi_i = \sigma^2$, то

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right| < a\right) \approx 2\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (6)$$

где Φ — нормальное распределение Гаусса — четная функция, таблицы которой приведены в каждой книге по теории вероятностей.

Пример 2. Сколько надо сделать измерений, имеющих одну и ту же точность $\sigma = 0{,}1$, чтобы с точностью до 0,01 получить измеряемую величину с надежностью в 98%?

Решение. Здесь $a = 0{,}01$, и в формуле (6) надо подобрать n так, чтобы выполнялось неравенство $2\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{n}}{0{,}1}\right) \geqslant 0{,}98$. Из таблиц находим, что $\frac{\sqrt{n}}{10} \geqslant 2{,}33$, откуда $n \geqslant 543$.

ОТВЕТЫ

К пункту 1. 1. а) $Ц$ и $Г$ несовместны; б) совместны A и B, B и C, B и D, $C \subset A$, $D \subset B$; в) несовместны A и B, A и C, B и C, D и A, B и D; $C \subset D$, $D \subset C$; г) совместны B и C, A и B; несовместны A и C; $C \subset B$. **2.** Нет. **3.** Нет. **4.** H = «на одной монете выпал герб, а на другой — цифра». **5.** $\{A, B, C\}$.

К пункту 2. 1. а) Да; б) нет (как правило); в) не обязательно; г) равновероятны A и B, A и C — нет; д) да; е) да. **2.** а) Да; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) нет. **3.** См. упр. 1, г. **4.** При броске игральной кости события Q_1, Q_2 и Q_3. **5.** При броске игральной кости $Q_ч$, $Q_н$, $Q_{пр}$, Q_1. **6.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{3}$. **7.** $\frac{1}{2}$.

8. а)

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

б)

0	1	2	3	4	5
$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

в) $\frac{11}{36}$. 9. $\frac{1}{5}$. 10. $\frac{12}{125}$. 11. $\frac{3}{7}$. 12. $\frac{1}{720}$. 13. а) $\frac{899}{1554} \approx 0{,}58$; б) $\frac{775}{777} \approx 0{,}9974$. 14. $\frac{1}{20}$. 15. $\frac{1}{360}$. 16. $\frac{4}{9}$. 17. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{13}{28}$; в) $\frac{3}{28}$. 18. $\frac{1}{7^5}$. 19. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{48}{95}$; г) $\frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^3} \approx 0{,}35$; д) $\frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5 + C_8^2 \cdot C_{12}^6 + C_8^1 \cdot C_{12}^7 + C_8^0 \cdot C_{12}^8}{C_{20}^8} = \frac{5137}{8398} \approx 0{,}6117$. 20. $\frac{C_{13}^3 \cdot C_{10}^2 \cdot C_7^3}{C_{30}^8} = \frac{154}{2001} = 0{,}077$.

21. $\frac{1}{n}$. 22. $\frac{2}{7}$, не зависит от места в очереди. 23. $\frac{1}{k}$, не зависит от места в очереди. 24. $\frac{p}{k}$. 25. $\frac{3}{11}$.

К пункту 3. 2. Нет, верно только при $A \cap B = U$. 3. Верно только при $A \cap B = U$. 5. Верно только при $A \cap C = U$. 6. а) При $B = U$; б) при $A \subset B$; в) при $A = B = U$. 7. а) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$; б) $A_2 \cup A_3 \cup A_4$. 8. а) $\bigcup_{i=1}^{51} A_i$; б) $\bigcup_{k=1}^{11} A_{3k-1}$. 9. 1) M, 2) K, 3) G, 4) M, 5) G, 6) H, 7) M. 10. $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$, $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $D = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cap \cup \overline{A}_3$, $M = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cup A_3)$, $G = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$, $F = (\overline{A}_1 \cap \cap \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)$. 11. 1) B, 2) A, 3) B, 4) C, 5) C, 6) F, 7) F, да, 8) нет, $B \cap C = C \neq D$. 12. $\overline{A}$ = «выпадение хотя бы одной цифры», $\overline{B}$ = = «вынут красный или черный шар», $\overline{C}$ = «хотя бы один промах», $\overline{M}$ = «не менее трех попаданий», $\overline{D}$ = «все промахи», $\overline{F}$ = «выигрыш второго игрока или ничья». 13. Рис. 11, $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $\overline{A} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$; рис. 12, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $\overline{A} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$; рис. 13, $A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$, $\overline{A} = (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cap (\overline{A}_3 \cup \overline{A}_4)$; рис. 14, $A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \cap (A_4 \cup A_5 \cup A_6)$, $\overline{A} = \overline{A}_1 \cup (\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_4 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6)$.

К пункту 4. 1. $P(A) = 0{,}85$ и $P(B) = 0{,}25$. 2. $P(A \cup B \cup C) = = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap \cap B \cap C)$.

3. а) $1 - \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{46}{57}$; б) $\frac{C_{12}^5 + C_{12}^5 \cdot 8}{C_{20}^5} = \frac{121}{646} = 0{,}187$; в) $1 - \frac{C_{12}^5 + C_{12}^4 \cdot 8}{C_{20}^5} = = \frac{224}{323} = 0{,}693$; г) $\frac{C_{12}^2 + C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{47}{95} = 0{,}495$. 4. 0,9 и 0,6. 5. $1 - \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{C_{30}^3} = = \frac{155}{203} = 0{,}763$. 6. $1 - 0{,}85 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}9 = 0{,}3268$.

К пункту 5. 1. $\frac{1}{4}$. 2. $\frac{13}{56}$. 3. 0,72 и 0,02. 6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - - P(A) \cdot P(B)$. 7. а) 0,985; б) 0,14; в) 0,425. 8. $(0{,}99)^4 = 0{,}96$.

К пункту 6. 2. $\frac{2}{\pi}$. 3. $\frac{1}{5}$. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\frac{1}{4}$. 6. $\frac{2}{\pi}$. 7. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. 8. 0. 9. 0. 10. $\frac{1}{2}$. 11. $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

К пункту 7. 1. $C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0{,}155$ и $C_{10}^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 = 0{,}323$. 3. $P_{0,10} + P_{1,10} + P_{2,10} + P_{3,10} = 0{,}93$. 4. $C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{5120}{19683} = 0{,}26$;

$P_{0,10} + P_{1,10} + P_{2,10} + P_{3,10} = 0{,}56$; $C_{10}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0{,}2276$. **5.** 1) $\frac{1}{4}$ и $\frac{7}{32}$ — вероятнее выиграть три партии из четырех; 2) $\frac{5}{16}$ и $\frac{93}{256}$ — вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

К пункту 8. 1. $M\xi_1 = 0{,}2$; $M\xi_2 = 1{,}8$; $M\xi_3 = 0{,}9$; $M\xi_4 = -0{,}4$; $M\xi_5 = 1{,}3$.

2. 3,4 **3.** —0,4. **4.** 0,9. **5.** 2,2. **6.** —8,6. **7.** 7,1.

К пункту 9.

1.

ξ_1	—5	—2	0	1	3	7
P	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1	0,1

ξ_2	—7	—1	0	3	4	5	10
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1

ξ_3	—6	—2	0	1	3	5
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,3

ξ_4	—7	—5	—3	0	4	6
P	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1

ξ_5	—5	0	1	7	10
P	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2

$\xi_4 \cdot \xi_5$	—70	0	15	35	40	42
P	0,1	0,5	0,1	0,1	0,1	0,1

3. $E_2 \cup E_6 \cup E_8$.

4. $E_1 \cup E_5 \cup E_6 \cup E_9 \cup E_{10}$.

5. $E_1 \cup E_2 \cup E_6 \cup E_7 \cup E_{10}$.

6. $E_4 \cup E_5 \cup E_8 \cup E_9$.

7. E_3. **8.** 0,2,

ξ	—3	0	1
P	0,5	0,3	0,2

К пункту 10. 4. а) 39,04; б) 25,01 и 31,45.

ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПОНЯТИЕ О ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Основное назначение ЭВМ — это автоматическое решение задач. Чтобы машина могла решить задачу, необходимо алгоритм решения этой задачи описать на языке, который может быть расшифрован машиной. Такое описание принято называть программой. Каждая ЭВМ имеет свой входной язык программирования. На первых порах, когда только появлялись ЭВМ, этот язык был единственным средством программирования. Входной язык ЭВМ представляет собой набор команд, записанных в специальном коде. Программы в этом языке лишены математической наглядности, текст программы зашифрован цифрами. Составлять такие программы и следить за их выполнением сложно из-за большого объема технической работы.

Приведем пример использования машинных кодов. Предположим, что ячейки машины перенумерованы от 0 до 3777 в восьмеричной системе счисления; операция сложения имеет код 01, операция умножения имеет код 03. Пусть для значений переменных a, x, b, c будут отведены ячейки 1001, 1002, 1003 и 1004 соответственно. Тогда часть программы, состоящая из двух машинных команд:

03 1001 1002 1004

01 1004 1003 1004

будет предписывать выполнение действий:

1) Перемножаются числа, находящиеся в ячейках 1001 и 1002, и результат отсылается в ячейку 1004.
2) Складываются числа, находящиеся в ячейках 1004 и 1003, и результат отсылается в ячейку 1004.

Таким образом, этими командами фактически вычисляется $c = ax + b$.

Для облегчения процесса программирования и повышения эффективности общения с ЭВМ стали разрабатывать средства, позволяющие автоматизировать процесс программирования. Появились специальные обслуживающие программы. Некоторые из этих программ играют роль переводчика с одного языка программирования на другой. Благодаря таким программам можно описывать решение задачи на более наглядном языке. Так, язык, в котором команды изображаются в виде символов, являющихся знаками операций, буквенными обозначениями переменных и т. д., является более удобным средством описания алгоритмов.

Сравним с предыдущим примером команды, записанные в буквенных обозначениях:

$$\times\ a\ x\ c$$
$$+\ c\ b\ c$$

Этими командами выполняется следующее. Вычисляется произведение значений переменных a и x и результат присваивается переменной c. Затем к полученному результату прибавляется значение переменной b и результат присваивается переменной c. Таким образом, получаем:

$$c = ax + b$$

Программирование на таком языке иногда называют программированием в содержательных или буквенных обозначениях.

При первоначальном знакомстве с элементами программирования в факультативном курсе VIII класса демонстрировалась учебная ЭВМ. Для этой машины был введен входной язык. Для вычисления $c = ax + b$ с помощью команд учебной ЭВМ можно записать:

$$C{:}= A \times X$$
$$C{:}= C + B$$

В описаниях вычислительных процессов можно четко выделить следующие основные составные части:

1) ввод исходных данных и вывод результатов;
2) вычисление значений арифметических выражений;
3) последовательный порядок выполнения действий;
4) разветвления при выполнении действий;
5) многократное повторение действий.

Языки, предназначенные для описания алгоритмов, иногда называют алгоритмическими языками. Наиболее распространенными алгоритмическими языками являются ФОРТРАН, АЛГОЛ, 60, БЭЙСИК и др. Перевод программы с одного языка на другой принято называть трансляцией.

Входной язык учебной ЭВМ является примером упрощенного алгоритмического языка. Перечислим команды этого языка:

НАЧАЛО	
КОНЕЦ	
ВВОД (A, B, ...)	A, B — переменные
ВЫВОД (A, B, ...)	
$C{:}= A$	C — переменная
$C{:}= A + B$	A и B — переменные или числа
$C{:}= A - B$	
$C{:}= A \times B$	
$C{:}= A/B$	
$C{:}= A \uparrow B$	
НА T	T— номер команды, на которую передается управление.

ЕСЛИ $A*B$ ТО НА T Здесь $*$ означает любой из знаков сравнения $=, \neq, \geqslant, <, \leqslant, >$; A и B — переменные или числа; T — номер команды, на которую передается управление, если верно $A * B$

Средствами языка учебной ЭВМ (с помощью перечисленных выше команд) наглядно записываются команды ввода и вывода, команды выполнения арифметических действий. Удобно и наглядно представляется разветвление вычислительного процесса. Циклический процесс организуется с помощью команды проверки условия и счетчика числа повторений.

Приведем пример программы вычисления $Y = AX^3$ для заданных 20 значений переменной X, составленной на языке учебной ЭВМ. В программе используем переменную C для счетчика. Числа — значения переменных, указанных в команде ввода, — располагаются непосредственно за программой. В данном случае не будем выписывать их конкретные значения, а вместо этих чисел поставим за программой многоточие.

Программа (один из возможных вариантов):

0. НАЧАЛО
1. ВВОД (A)
2. $C: = 1$
3. ВВОД (X)
4. $Y: = X \uparrow 3$
5. $Y: = A \times Y$
6. ВЫВОД (Y)
7. ЕСЛИ $C = 20$ ТО НА 10
8. $C: = C + 1$
9. НА 3
10. КОНЕЦ

...

Определенные неудобства и потеря наглядности происходит при описании вычисления значения арифметического выражения, содержащего несколько действий, особенно когда требуется запоминать много промежуточных результатов. Так, для вычисления значения

$$D = B^2 - 4AC$$

потребуются вспомогательные переменные, например E для B^2, F для $4AC$ (в некоторых случаях в качестве вспомогательных переменных используются заданные переменные, например A, B, C), тогда для вычисления значения данного выражения можно записать следующую последовательность команд:

$$E: = B \uparrow 2$$
$$F: = A \times C$$
$$F: = 4 \times F$$
$$D: = E - F$$

Во многих алгоритмических языках эти неудобства устранены, и имеются дополнительные возможности для более совершенного описания основных частей вычислительного процесса и организации их взаимосвязи в полном описании алгоритма.

УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ЯЗЫКА АЛГОЛ 60

Алгоритмический язык АЛГОЛ 60 создавался на протяжении нескольких лет. В нем сосредоточилось все лучшее (в международном масштабе), что было в различных алгоритмических языках. Он удобен для программирования широкого круга задач, близок к обычному математическому языку описания решения задач, не зависит от конкретных ЭВМ. Алгоритмический язык АЛГОЛ 60 получил международное признание и широкое практическое применение.

Название АЛГОЛ 60 состоит из сокращения английских слов **alg**orithmic **l**anguage — алгоритмический язык и года (1960), когда появилось официальное сообщение о нем.

О структуре АЛГОЛа 60. В алгоритмическом языке АЛГОЛ 60 перечислены все символы, которые могут быть использованы в описании алгоритмов. Этими символами являются буквы, цифры, различные знаки операций и т. д. В этом языке указываются также правила, по которым из символов составляются те или иные части описания алгоритма. Законченное описание алгоритма на данном языке называется программой (алгол-программа).

В программе указывается, какие переменные в ней используются, какие действия надо выполнить для решения задачи и каков порядок выполнения этих действий. Вычислительный процесс, как правило, разбивается на несколько этапов. Каждый такой этап включает в себя одно или несколько действий, которые надо выполнить при решении задачи. Эти этапы принято называть операторами. Таким образом, операторы являются составными частями программы.

Некоторые операторы включают в себя арифметические выражения, которые в свою очередь состоят из чисел, переменных, функций.

В АЛГОЛе выделяется класс целых чисел. Над целыми числами все действия выполняются точно. Все другие числа относятся к классу вещественных чисел. Эти числа считаются представленными приближенно, и действия с ними выполняются приближенно, причем степень приближения зависит от конкретных условий (от машины, от транслятора и т. д.) и не учитывается в АЛГОЛе.

Арифметические выражения. Многие из действий вычислительного процесса связаны с вычислением числового значения того или иного арифметического выражения. Поэтому ряд операторов

включает в себя арифметические выражения. Рассмотрим, как записываются арифметические выражения в АЛГОЛе.

Запись арифметических выражений в АЛГОЛе близка к обычной общепринятой в математике форме. Мы знаем, что арифметические или алгебраические выражения включают в себя числа, переменные и некоторые функции, причем употребляются круглые, квадратные, фигурные скобки и допускается многоэтажная запись выражений. В отличие от этого в АЛГОЛе запись арифметических выражений производится на уровне строки (без многоэтажности), для указания порядка действий используются круглые скобки. Мы рассмотрим правила составления арифметических выражений в АЛГОЛе, разобрав правила записи составных частей этих выражений.

Ч и с л а. Для записи чисел в АЛГОЛе используются все десять цифр 0, 1, ..., 9, вместо десятичной запятой употребляется точка. Точка и десять перечисленных цифр являются символами АЛГОЛа. Целые числа записываются в виде одной или нескольких цифр; в записи нецелых чисел используется символ «точка», отделяющий целую часть числа от дробной части, например:

125 — целое число 125;

12.7 — нецелое число 12,7.

Перед числом может стоять знак + или —, которые также относятся к символам АЛГОЛа. Таким образом, числа могут быть без знака или со знаком.

П е р е м е н н ы е. В АЛГОЛе широко используется понятие переменной. Для обозначения переменных употребляются большие и маленькие буквы латинского и русского алфавитов. Эти буквы считаются символами АЛГОЛа.

Кроме отдельных букв, переменные могут быть обозначены некоторым набором букв и цифр. Так, две буквы, записанные одна за другой, например *ab*, изображают одну переменную. Нельзя путать эту запись с записью произведения двух переменных в математике, когда знак умножения опускается. Аналогично три, четыре и любое число подряд записанных букв изображают одну переменную. С такого рода обозначениями приходится встречаться при обозначении тригонометрических функций, например синуса, косинуса и т. д. Использовать такие обозначения удобно, так как при этом появляется возможность вложить в обозначение некоторое содержание. Так, при вычислении площади можно использовать переменную ПЛОЩАДЬ, при вычислении суммы — переменную СУММА и др. Кроме букв, можно также использовать и цифры, только обозначение переменной должно начинаться с буквы. Так, корни квадратного уравнения можно обозначить как переменные *x*1 и *x*2. В литературе по АЛГОЛу вместо слова «обозначение» часто употребляют слово «имя» или слово «идентификатор».

Итак, для записи переменных используются идентификаторы. Дадим следующее определение: *идентификатором называется любая конечная последовательность букв и цифр, начинающаяся с*

буквы. Заметим здесь, что мы пока рассматриваем только простые переменные, а именно переменные, не являющиеся элементами последовательностей, о которых речь пойдет позднее.

Функции. Некоторые часто употребляемые функции называются стандартными функциями. Обозначим аргумент функции через E и запишем некоторые из стандартных функций:

sin (*E*) — синус значения *E*;
cos (*E*) — косинус значения *E*;
arctan (*E*) — арктангенс значения *E*;
abs (*E*)— абсолютная величина значения *E*;
sqrt (*E*) — квадратный корень из значения *E*.

Мы видим, что в записи функции аргумент обязательно заключается в круглые скобки. Перед круглыми скобками стоит название функции, т. е. ее обозначение или идентификатор функции. Эти идентификаторы *sin*, *cos*, *arctan*, *abs*, *sqrt* закрепляются за стандартными функциями и не могут использоваться для других целей[1]. В качестве аргумента может быть число, переменная и вообще любое арифметическое выражение. Примеры более громоздких аргументов мы запишем несколько позднее. Смысл каждой из перечисленных функций тот же, что и в математике. Аргументы для функций синуса и косинуса должны быть в радианной мере.

Арифметические выражения. Из чисел, переменных и функций с использованием знаков арифметических действий и круглых скобок строятся арифметические выражения. Каждое отдельно взятое число, переменная, функция (со знаком перед ними или без знака) являются частным случаем арифметического выражения. Порядок действий устанавливается с помощью только круглых скобок. Знаки арифметических операций относятся к символам АЛГОЛа. Употребляются следующие арифметические операции:

\+ сложение;
— вычитание;
× умножение;
/ деление;
÷ деление нацело;
↑ возведение в степень.

Старшинство операций соответствует общепринятому.

К особенностям использования операций можно отнести следующее. Знак операции умножения опускать нельзя. Запрещается вместо этого знака употреблять какой-либо другой, например точку. Деление изображается наклонной чертой, знак черты дроби или знак двоеточия в смысле деления не употребляются.

Арифметическая операция деления нацело позволяет получить частное от деления одного целого числа на другое с остатком.

---

[1] Другие стандартные функции АЛГОЛа в данном изложении не рассматриваются. За ними закрепляются идентификаторы *sign*, *ln*, *exp*, *entier*.

Возведение в степень, например, 2^3 или a^b на АЛГОЛе записывается в одну строку, а именно: 2↑3 и a↑b. Нельзя, чтобы встречались в записи два знака операций подряд. Так, 2^{-3} запишется в виде 2↑ (—3).

Приведем примеры записи в АЛГОЛе арифметических выражений (справа приводятся обычные математические записи этих выражений):

1. —0.2	—0,2
2. *pi*	π
3. $2/(abs(x) + 1)$	$2 : (\|x\| + 1)$ или $\dfrac{2}{\|x\| + 1}$
4. $(a + b) \uparrow 0.5$	$\sqrt{a + b}$ или $(a + b)^{\frac{1}{2}}$
5. $sqrt\ (b \uparrow 2 - 4 \times a \times c)$	$\sqrt{b^2 - 4ac}$

Основные операторы. Предписания для выполнения каких-либо действий в АЛГОЛе называются операторами. Ниже приведем несколько основных операторов АЛГОЛа.

Оператор присваивания. С помощью оператора присваивания происходит присваивание некоторой переменной значения соответствующего арифметического выражения. Оператор присваивания включает символ «:=» (знак присваивания), слева от которого записывается переменная, а справа — арифметическое выражение, например: запись $c := a + b$ означает, что переменной c присваивается значение арифметического выражения $a + b$. Учитывая, что числа, переменные, функции являются также арифметическими выражениями, можно записать следующие операторы:

$x := 0$
$a := -2.3$
$c := x$
$p := abs\ (x + y)$
$x := x + 2$

Смысл этих операторов очевиден.

Обозначив корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ через x и y, можно записать следующие операторы для вычисления x и y:

$x := (-b + sqrt\ (b\uparrow 2 - 4 \times a \times c)) / (2 \times a)$
$y := (-b - sqrt\ (b\uparrow 2 - 4 \times a \times c)) / (2 \times a)$

Оператор ввода. С помощью оператора ввода осуществляется ввод в машину исходных данных задачи. Оператор ввода записывается в виде слова *ввод*, за которым в круглых скобках указывается одна или несколько переменных, отделенных друг от друга запятой, например:

ввод (k, x, p, c)
ввод (e)

После работы оператора ввода в машину будут введены одно или несколько чисел, которые соответствуют значениям переменных, указанных в операторе ввода.

Оператор вывода. С помощью оператора вывода осуществляется вывод значений указанных в нем переменных. Оператор вывода записывается в виде слова *вывод*, за которым в круглых скобках указывается одна или несколько переменных, отделенных друг от друга запятой, например:

вывод (*a*)
вывод (*b*, *c*, *e*)

Один оператор ввода или вывода, содержащий несколько переменных, может быть заменен несколькими соответствующими операторами с меньшим числом переменных. Аналогично можно объединять несколько операторов ввода или вывода, составив один оператор с большим числом переменных.

Так, для предыдущих примеров можно было записать операторы:
ввод (*k*, *x*); *ввод* (*p*); *ввод* (*c*); *ввод* (*e*) или
ввод (*x*, *x*, *p*, *c*, *e*) и т. д. Аналогично и для операторов вывода: *вывод* (*a*); *вывод* (*b*, *c*); *вывод* (*e*) или *вывод* (*a*, *b*, *c*, *e*) и т. д.

Простейшие программы. Рассмотренных выше арифметических выражений, операторов присваивания, ввода и вывода уже достаточно для составления алгольных программ, разумеется, самых простейших.

Как составляется программа? Началом программы является символ **begin**, концом программы является символ **end**[1]. Между этими символами размещаются необходимые для решения задач операторы. Все переменные, встречающиеся в программе, должны быть описаны, иначе говоря, должны получить некоторые характеристики. Такой характеристикой является тип переменной: целый или вещественный. Описание переменных располагается в начале программы перед операторами. Описание состоит из символа **integer** или **real**[1], за которым записывается одна или несколько переменных, отделенных друг от друга запятой. Приведем примеры описаний:

integer *i*, *j*, *k*;
real *c*

Описания между собой и от операторов отделяются точкой с запятой. Операторы друг от друга также отделяются точкой с запятой.

---

[1] Такие символы, как **begin**, **end**, **integer**, **real**, будем называть служебными словами. Далее встретится еще несколько служебных слов АЛГОЛа. Служебные слова в печатном тексте выделяются жирным шрифтом, а в рукописном — подчеркиваются:

begin — начало;
end — конец;
integer — целый;
real — вещественный.

В общем виде программу можно изобразить так:

begin описание; ...; описание; оператор; ...; оператор **end**

Здесь многоточиями отмечено или несколько описаний, или несколько операторов. Каждая переменная должна быть описана один раз. Операторы выполняются в порядке их написания. Об изменении порядка выполнения операторов будет сказано ниже.

Рассмотрим программу вычисления значений корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в предположении, что корни действительные. Составим программу. Обозначим корни этого уравнения через x и y.

Программа[1]

```
1. begin
2. real x, y, a, b, c;
3. ввод (a, b, c);
4. x:= (—b + sqrt (b↑2 — 4 × a × c)) / (2 × a);
5. y := (—b — sqrt (b↑2 — 4 × a × c)) / (2 × a);
6. вывод (x, y);
7. end
```

В этой программе дважды вычисляется достаточно громоздкое арифметическое выражение — корень квадратный из дискриминанта уравнения. Чтобы избежать этого, достаточно иметь дополнительно еще одну переменную, например d, для хранения значения $\sqrt{b^2 - 4ac}$. В программе также встречается дважды выражение $2 \times a$. В этом случае экономия вычислений с помощью вспомогательной переменной едва ли целесообразна. Запишем программу следующим образом:

```
1. begin
2. real x, y, a, b, c, d;
3. ввод (a, b, c);
4. d := sqrt (b↑2 — 4 × a × c);
5. x := (—b + d) / (2 × a);
6. y := (—b — d) / (2 × a);
7. вывод (x, y);
8. end
```

В этой программе вычисление значения корня квадратного из дискриминанта выполняется один раз (строка 4). Значение d в дальнейшем используется при вычислении корней уравнения x и y (строки 5, 6).

Оператор перехода и пустой оператор. Оператор перехода позволяет прервать последовательное выполнение операторов и осуществить переход на оператор с той или иной меткой. Оператор перехода состоит из символа **goto**, что означает «перейти на», за

---

[1] Для удобства пояснений строки программ перенумерованы (номера стоят слева, эти номера не влияют на выполнение программы).

которым указывается метка того оператора, на который надо перейти, например:

goto *M*1

Этот оператор перехода осуществляет переход к оператору с меткой *M*1. Рассмотрим участок программы, в которой встречается и этот оператор перехода, и некоторый оператор с указанной меткой. Метка, помечающая оператор, отделяется от него двоеточием:

a:= *b*; *c*:= *c* + *a*; **goto** *M*1; *b*:= *c* + 2; *вывод* (*b*); *M*1: *вывод*(*c*)

В этой части программы содержится 6 операторов. Первые два оператора присваивания выполняются в естественном порядке, затем оператор перехода осуществляет переход на оператор с меткой *M*1, т. е. пропускаются операторы *b*:= *c* + 2; *вывод* (*b*) и начинает работать оператор вывода значения *c*, который помечен этой меткой, а именно оператор *M*1: *вывод* (*c*).

Пустой оператор не предписывает никакого действия. В основном он используется для постановки метки в нужной части программы. Пустой оператор представляет собой отсутствие символов. Операторы отделяются друг от друга точкой с запятой, поэтому одним из примеров пустого оператора может быть пустой оператор, расположенный между двумя точками с запятой:

...; ; ...

Если этот пустой оператор пометить меткой *M2*, то запись примет следующий вид:

...; *M2*:; ...

Тем самым мы поставили метку *M2* в этой части программы. Метка представляет собой идентификатор.

Условные операторы. Изменять последовательное выполнение операторов можно с помощью условных операторов. Эти операторы проверяют выполнение некоторых условий и в зависимости от результата проверки определяют порядок дальнейших вычислений.

Общий вид условного оператора можно записать так:

ЕСЛИ условие ТО оператор 1 ИНАЧЕ оператор 2

При выполнении условия работает оператор 1. Если условие не удовлетворяется, то работает оператор 2. Таким образом, выполнение условного оператора сводится к работе одного из двух операторов. В качестве условий мы будем рассматривать отношения между двумя арифметическими выражениями, в частности между переменными или числами. При этом будем использовать символы АЛГОЛа $=, \neq, <, \leqslant, >, \geqslant$, являющиеся знаками отношения. Примеры отношений или условий:

$b = d$
$a \neq 0$
$2 = 7$
$2 \neq 7$
$c \leqslant a + b$
$a + b > 1 + x - abs\,(y)$

Истинно или ложно условие, т. е. удовлетворяется оно или нет, можно установить, сравнив значения арифметических выражений, входящих в это условие. Так, в третьем примере условие ложно, а в четвертом оно истинно. Для утверждения истинности или ложности условий или отношений в других примерах надо знать значения входящих в них переменных. Словам ЕСЛИ, ТО, ИНАЧЕ в схеме условного оператора соответствуют символы АЛГОЛа: **if**, **then**, **else**. Поэтому общий вид условного оператора можно записать и так:

if отношение **then** оператор 1 **else** оператор 2

Приведем несколько примеров условных операторов.

Пример 1. Пусть функция определена следующим образом:

$$y = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0 \\ x \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

Вычисление значения y можно описать условным оператором:

if $x \leqslant 0$ **then** $y := 0$ **else** $y := x$

или таким условным оператором:

if $x > 0$ **then** $y := x$ **else** $y := 0$

Пример 2. Вывести на печать наибольшее из значений a и b:

if $a \geqslant b$ **then** *вывод* (a) **else** *вывод* (b)

Пример 3.

if $d \geqslant 0$ **then** $d := sqrt\ (d)$ **else goto** M

Пример 4.

if $d = 0$ **then goto** $M1$ **else goto** $M2$

В АЛГОЛе допускается и сокращенная форма условного оператора:

if отношение **then** оператор 1

Эта конструкция эквивалентна полной форме условного оператора, в которой оператор 2, стоящий за символом **else**, является пустым оператором. Приведем примеры условного оператора сокращенной формы.

Пример 1.

if $a = 0$ **then goto** $S1$

Пример 2.

if $a \neq 0$ **then** $x := b/a$

Пусть требуется вычислить $y = |x|$. Это можно сделать с помощью условного оператора:

if $x \geqslant 0$ **then** $y := x$ **else** $y := -x$

Мы видим, что с помощью условного оператора определяется функция вычисления абсолютного значения. В АЛГОЛе это же можно сделать с помощью оператора $y := abs\ (x)$. Полезно учесть, что вычисление функции $abs\ (x)$ сводится к выполнению условного оператора.

В условном операторе за символами **then** и **else** разрешается размещать по одному оператору. Однако при вычислениях часто

приходится при определенных условиях выполнять группу операторов.

В АЛГОЛе есть возможность соединить несколько операторов в один оператор. Это делается с помощью составного оператора.

Составной оператор. Составной оператор имеет вид:

begin группа операторов **end**

Группа операторов состоит или из одного оператора, или из нескольких операторов, отделенных друг от друга символом «точка с запятой». Примеры составных операторов:

Пример 1. Составной оператор, содержащий один пустой оператор:

begin end

Пример 2. Составной оператор, содержащий два оператора:

begin $x := b/a$; **goto** M **end**

Пример 3. Составной оператор, содержащий три оператора:

begin $x := a$; $y := b$; ***вывод*** (a, b) **end**

Пример 4. Составной оператор, содержащий один условный оператор:

begin if $a < b$ **then** $y := a$ **else** $y := b$ **end**

Рассмотрим несколько программ с использованием условных операторов.

Задача. Из двух данных чисел выбрать наибольшее.

Обозначим данные числа через a и b, результат — через y.

Программа

```
1.  begin
2.  real a, b, y;
3.  ввод (a, b);
4.  if a ⩾ b then y := a else y := b;
5.  вывод (y)
6.  end
```

Используя сокращенную форму условного оператора, можно составить другую программу.

Программа

```
1.  begin
2.  real a, b, y;
3.  ввод (a, b);
4.  y := a;
5.  if b > a then y := b;
6.  вывод (y)
7.  end
```

В этой программе сначала переменной y присваивается значение переменной a. В условном операторе (строка 5) переменной y присваивается значение переменной b, если окажется, что a меньше, чем b. Если же a больше или равно b, то в y сохранится ранее присвоенное значение a.

По каждой из приведенных здесь двух программ должен получиться один и тот же результат. Эти программы практически

эквивалентны, и выбор одной или другой из этих программ зависит от желания и вкуса программиста.

Задача. Вычислить корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (провести исследование дискриминанта). Предположить, что коэффициент при x^2 отличен от нуля.

Обозначим через a, b, c коэффициенты уравнения; через $x1$, $x2$ — корни уравнения; через d, e — вспомогательные переменные для промежуточных результатов вычислений (d — дискриминант). Договоримся печатать следующую информацию. Если d отрицателен, то напечатаем одно отрицательное число, а именно вычисленное значение дискриминанта. Если же корни действительные, то напечатаем два значения (корни), причем случай совпадения корней, т. е. $d = 0$, выделять особо не будем — напечатаем два одинаковых значения.

Программа

```
1.  begin real a, b, c, x1, x2, d, e;
2.  ввод (a, b, c); d := b ↑ 2 — 4 × a × c;
3.  if d < 0 then
4.        begin вывод (d); goto конец end;
5.  d := sqrt (d);
6.  e := 2 × a;
7.  x1 := (—b + d)/e; x2 := (—b — d)/e;
8.  вывод (x1, x2);
9.  конец: end
```

Мы рассмотрели примеры программ, в которых использовались различные условные операторы. В конструкцию условного оператора, как мы видели в общей схеме, входят операторы, а именно после символа **then** стоит некоторый оператор 1, а после символа **else** стоит оператор 2. Какие же операторы можно использовать в качестве этих операторов 1 и 2? В качестве оператора 2 может быть использован любой оператор, т. е. после символа **else** можно писать любой оператор. Что же касается оператора 1, стоящего за символом **then**, то здесь накладывается ограничение: нельзя ставить условный оператор и оператор цикла, о котором речь пойдет ниже. Это ограничение формальное. Каждый условный оператор и любой другой становится составным, если заключить его в символы **begin** и **end**.

Задача. Пусть задан отрезок $[c, d]$; для данного числа a определить, принадлежит ли оно отрезку $[c, d]$. В случае принадлежности напечатать 1, иначе напечатать 0.

Составим программу, введя следующие обозначения:

c и d — начало и конец отрезка;

a — данное число;

p — признак.

Программа

```
1.  begin real a, c, d; integer p;
2.  ввод (a, c, d); p := 0;
```

3. **if** $a \geqslant c$ **then**
4. **begin if** $a \leqslant d$ **then** $p := 1$ **end;**
5. *вывод* (p) **end**

Здесь употреблена сокращенная форма условного оператора. Условный оператор размещен в строках 3—4. После символа **then** стоит составной оператор, содержащий в себе один условный оператор — строка 4. В случае, когда a больше или равно c, необходимо сравнить значение a со значением d. Так как за символом **then** нельзя непосредственно писать условный оператор, то мы вместо условного оператора записали составной, формально заключив внутренний условный оператор в символы **begin** и **end**. Программа работает следующим образом. Сначала полагаем $p = 0$. Далее, если окажется, что $c \leqslant a \leqslant d$, то p будет присвоено значение 1. Поясним работу условного оператора (строки 3—4). Если a меньше c, т. е. a не принадлежит данному отрезку, то оператор этот проработает впустую, p останется равным 0. Если же a не меньше c, то рассматривается составной оператор в строке 4. В составном операторе с помощью условного оператора проверяется новое условие. Если a больше d, то условный оператор не изменит значения p и будет выход из условного оператора (снова a не принадлежит отрезку). Если же a меньше или равно d, то p примет значение 1, т. е. a принадлежит отрезку.

З а д а ч а. Вычислить значение функции по заданному значению аргумента. Функция определена следующим образом:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{при } x < -1 \\ x^2 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 4 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Составим программу вычисления значения этой функции.

П р о г р а м м а

1. **begin real** x, y; *ввод* (x);
2. **if** $x < -1$ **then** $y := 1/x \uparrow 2$ **else**
3. **if** $x \leqslant 2$ **then** $y := x \uparrow 2$ **else** $y := 4$;
4. *вывод* (y) **end**

Можно предложить другой вариант программы, где вместо условного оператора (строки 2—3), включающего в себя условный оператор (строка 3), употребляются условные операторы с более простой структурой. В другом варианте воспользуемся меткой «*выход*», помечающей оператор вывода в конце программы. Новая программа имеет следующий вид:

П р о г р а м м а

1. **begin real** x, y; *ввод* (x);
2. **if** $x < -1$ **then begin** $y := 1/x \uparrow 2$; **goto** *выход* **end;**
3. **if** $x \leqslant 2$ **then begin** $y := x \uparrow 2$; **goto** *выход* **end;**
4. $y := 4$;
5. *выход*: *вывод* (y) **end**

Этот вариант программы проще разобрать, но он менее компактен

по сравнению с предыдущим вариантом. Мы обращаем внимание на то, что в последней программе фактически дается расшифровка или пояснение работы условного оператора (строки 2—3) предыдущей программы, причем это пояснение дается с помощью операторов АЛГОЛа.

Операторы цикла. Действия того или иного оператора можно повторить многократно с помощью специального оператора — оператора цикла.

Структуру оператора цикла схематично можно представить как

for $p := A$ **step** B **until** C **do** S

Здесь использованы символы АЛГОЛа, означающие соответственно:

for — для, **step** — шаг, **until** — до, **do** — выполнить. В этом представлении оператора цикла буквы p, A, B, C, S кратко выражают следующее:

p — параметр цикла;

A, B, C — арифметические выражения;

S — любой оператор АЛГОЛа.

Параметром цикла может быть любая простая переменная. Параметр цикла принимает значение арифметического выражения A, затем значение $A + B$, затем $A + 2B$ и т. д., пока это значение не станет большим значения C. Для каждого значения параметра цикла, не превышающего значения C, выполняется оператор S.

Предполагается, что арифметические выражения A, B, C не зависят от простой переменной p и, кроме того, что выполнение оператора S не приводит к изменению значений p, A, B, C.

Пример оператора цикла:

for $t := 10$ **step** 5 **until** 35 **do** *вывод* (t)

Работа этого оператора цикла состоит в следующем. Для значений параметра цикла t, равных 10, 15, 20, 25, 30, 35, работает оператор вывода, т. е. происходит печать значений t. Таким образом, здесь оператор цикла заставляет шесть раз выполняться оператор *вывод* (t). Приведем примеры программ, содержащих оператор цикла.

Пример 1. Вычислить значения функции $y = x^3 - 1$ для заданных десяти значений аргумента.

Составим программу, в которой будет выполняться оператор ввода значения аргумента требуемое число раз:

```
begin integer p; real x, y;
    for p := 1 step 1 until 10 do
        begin ввод (x); y := x ↑ 3 — 1; вывод (y) end
end
```

В этой программе оператором цикла десять раз производится выполнение составного оператора. В составном операторе каждый раз вводится значение аргумента, вычисляется значение функции и выдается соответствующий результат.

Пример 2. Вычислить сумму квадратов четных чисел от 20 до 30.

Обозначим искомую сумму переменной *s*:

```
begin integer p; real s; s := 0;
    for p := 20 step 2 until 30 do s := s + p ↑ 2;
    вывод (s) end
```

В этой программе перед суммированием переменной *s* присваивается значение 0. В операторе цикла выполняется суммирование, т. е. оператор $s := s + p \uparrow 2$ работает для значений $p = 20, 22, 24, 26, 28, 30$. После оператора цикла выводится подсчитанная сумма.

Пример 3.

Получить значения квадратных корней чисел от 1 до 20 с шагом 0,001:

```
begin real x, y;
    for x := 1 step 0.001 until 20 do
        begin y := sqrt (x); вывод (y) end
end
```

Типы числовых значений арифметических выражений. Как уже отмечалось, в АЛГОЛе выделяется класс чисел, являющихся целыми; переменные, принимающие целые числовые значения, имеют тип **integer**. Числовые значения типа **integer** представляются точно, а числовые значения типа **real** могут быть представлены с некоторой числовой погрешностью, зависящей от конкретной реализации и не предусмотренной АЛГОЛом.

Если переменная *A* имеет тип целый, то, например, ее значение, будучи равным двум, запишется как целое число 2. Если же переменная *A* имеет тип вещественный, то ее значение, будучи равным, скажем, двум, может быть представлено числом типа **real** и записано как 2.0, или 1.99999999, или 2.000000001 и т. д.

При выполнении действий тип результата зависит от типа величин, над которыми выполняются действия, и определяется следующими правилами:

1) Для операций $+$, $-$, $\times$ результат имеет тип целый, если оба операнда имеют тип целый; в других случаях — тип вещественный.

2) Операция деления всегда дает результат типа **real**.

3) Операция деления нацело применима только к целым числам и всегда дает результат типа **integer**.

4) Результат $A \uparrow B$ имеет тип целый, если A и B имеют целый тип и B не отрицательно; в остальных случаях — тип вещественный.

Рассмотренные ранее стандартные функции имеют тип **real**.

Пример. Для вычисления значения n-го члена арифметической прогрессии можно воспользоваться, например, следующим оператором: $AP := A1 + D \times (P - 1)$, в котором все величины имеют целый тип. Значение арифметического выражения в соответствии с правилами является целым. В операторе это значение присваивается переменной AP, имеющей тип **integer**.

Блоки. В АЛГОЛе широко используется понятие «блок». Блок может представлять собой или всю программу, или ее часть. Блок состоит из описаний и операторов, причем сначала идут описания,

а затем операторы. Описания между собой и от операторов отделяются символом «;» (точка с запятой). Данная ранее схема программы совпадает с общим видом блока. Каждая переменная используемая в программе, должна быть описана. Описание распространяется только на данный блок, началом которого является символ **begin** и концом — символ **end** (между этими символами непосредственно за **begin** располагается соответствующее описание). Блок является одним из операторов АЛГОЛа.

Массивы чисел. В математике элементы какой-либо последовательности обычно обозначают буквой с индексом внизу, например:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{20},\ \ldots$$

Индекс указывает порядковый номер элемента в последовательности. В АЛГОЛе рассматриваются различные конечные числовые последовательности, которые называют массивами. Каждый элемент массива обозначается переменной с индексом. Все переменные одного массива изображаются одним и тем же идентификатором, который принято называть идентификатором массива. Индекс переменной помещается за обозначением переменной и заключается в квадратные скобки. Так, массив из 20 элементов, обозначенный идентификатором a, можно записать в следующем виде:

$$a\,[1],\ a\,[2],\ \ldots,\ a\,[20]$$

Квадратные скобки являются символами АЛГОЛа. Индексом переменной в программе может быть число, переменная и вообще арифметическое выражение. Так, $a\,[p]$ при $p = 5$ означает элемент $a\,[5]$.

Описание массивов. В блоке или в программе имеются описания массивов, которые содержат сведения о массивах: целые или нет их элементы, сколько этих элементов и как обозначены массивы. Описание состоит из символа **array**, что означает «массив», перед которым имеется символ **integer**, если массив состоит из целых чисел, и символ **real**, если массив состоит из действительных чисел. За символом **array** пишется идентификатор массива, за которым в квадратных скобках указываются первый и последний номера элементов массива, эти номера отделяются двоеточием, например:

integer array $a\,[1 : 20]$
real array $a\,[1 : 20]$

Описание массивов одного и того же типа, а также одинаковые длины массивов могут записываться более компактно, например:

integer array $a1\,[1 : 20],\ b1,\ c1\,[1 : 10]$
real array $a2,\ b2\,[1 : 50],\ c2\,[1 : 2]$

Первое описание массивов означает, что массивы, обозначенные $a1$, $b1$, $c1$, являются массивами с целыми элементами, причем

массив *a*1 содержит 20 элементов, а массивы *b*1 и *c*1 имеют одинаковое число элементов, а именно по 10 элементов.

Второе описание массивов означает, что массивы, обозначенные *a*2, *b*2, *c*2, являются массивами с действительными элементами, причем массивы *a*2 и *b*2 имеют одинаковое число элементов — по 50 элементов, а массив *c*2 содержит два элемента.

Описание массива может содержать в качестве номера элемента не число, а переменную и вообще арифметическое выражение. Например, может встретиться описание массива:

integer array *a* [1 : *p*]

Это описание сообщает, что массив содержит *p* элементов. Блок с такого рода описанием массива не может быть программой, так как значение *p* оказалось бы незаданным. В части программы, предшествующей этому описанию, должно быть задано значение *p* и описано *p*. Значит, этот блок является частью программы. Точнее, он расположен внутри блока, который является программой. Рассмотрим несложный пример программы, содержащей эти описания и соответствующие блоки:

begin integer *p*; *ввод* (*p*); **begin integer array** *a* [1 : *p*];
ввод (*a*); *вывод* (*p*, *a*) **end end**

Здесь наружный блок есть программа, в начале этого блока дано описание переменной *p*, затем идет оператор ввода *p* и далее новый блок. К моменту работы внутреннего блока переменная *p* имеет определенное значение, полученное в результате работы оператора ввода *p*. Внутренний блок, выступающий в роли оператора, содержит описание массива, обозначенного идентификатором *a*. Этим описанием задается длина массива *a* по данному значению *p*, т. е. описан массив с переменным значением верхнего или последнего номера элемента. Во внутреннем блоке содержатся описание и два оператора. Первый оператор вводит массив, так как в нем указан идентификатор массива. Этим оператором будут введены *p* чисел, которые обозначены соответствующими переменными с индексами. Второй оператор — оператор вывода — содержит два идентификатора, значения которых будут выведены. Идентификатор *p* означает простую переменную, значит, будет выведено одно число — значение *p*. Идентификатор *a* означает массив, значит, будет выведена группа чисел, количество которых определяется описанием указанного массива, а именно будут выведены *p* чисел.

В конце имеются два символа **end**. Первый символ **end** является концом внутреннего блока, а последний символ **end** является концом наружного блока, т. е. концом программы.

На примерах мы замечали, что программа на АЛГОЛе записывается в виде последовательности символов, которая иногда не умещается в одной строке. Текст АЛГОЛ-программы можно переносить на другие строки без каких-либо знаков переноса, преры-

вать строку можно на любом символе, однако для наглядности запись подразделяется на некоторые смысловые части.

Рассмотрим примеры программ с массивами.

Задача 1. Найти наибольший элемент данного массива.

Обозначения:

a — массив;

t — число членов массива;

max — наибольший элемент;

p — параметр цикла.

Программа

```
1.  begin integer t, p; real max; ввод (t);
2.      begin real array a [1 : t]; ввод (a);
3.          max := a [1];
4.          for p := 2 step 1 until t do
5.              if a [p] > max then max := a [p];
6.          вывод (max)
7.  end end
```

Задача 2. Указать номер наибольшего элемента в данном массиве.

Обозначим через *k* номер наибольшего элемента.

Программа

```
1.  begin integer t, p, k; ввод (t);
2.      begin real array a [1 : t]; ввод (a);
3.          k := 1;
4.      for p := 2 step 1 until t do
5.          if a [p] > a [k] then k := p;
6.      вывод (k)
7.  end end
```

Задача 3. Найти наибольший элемент данного массива и указать номер этого элемента.

Примем обозначения, использованные в предыдущих двух задачах. Заметим, что эта задача является по существу объединением указанных двух предыдущих задач. Нам предстоит в каком-то смысле объединить работу двух предыдущих программ.

Программа

```
1.  begin integer t, p, k; real max; ввод (t);
2.      begin real array a [1 : t]; ввод (a);
3.      max := a [1]; k := 1;
4.        for p := 2 step 1 until t do
5.            if a [p] > max then
6.            begin max := a [p]; k := p end;
7.        вывод (max, k)
8.  end end
```

Можно предложить другой вариант программы, а именно:

Программа

```
1.  begin integer t, p, k; real max; ввод (t);
2.      begin real array a [1 : t]; ввод (a);
3.          k := 1;
```

```
4.          for p := 2 step 1 until t do
5.              if a [p] > a [k] then k := p;
6.          max := a [k];
7.      вывод (max, k)
8.  end end
```

Эта программа является более экономной по сравнению с предыдущей программой. Так, в прежней программе переменная max столько раз изменяет свое значение, сколько раз изменяется значение переменной k. Первый раз до оператора цикла, а затем в операторе цикла. В последней программе переменная max принимает значение максимального элемента после оператора цикла, т. е. один раз (и больше его не меняет).

ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА АЛГОЛЕ

Алгоритм Евклида. Алгоритм Евклида является наиболее распространенным методом вычисления наибольшего общего делителя. Суть этого алгоритма в следующем. Пусть даны два целых числа a и b, причем $a > b \geqslant 0$.

Если $b = 0$, то НОД будет число a.

Если $b \neq 0$, то делят число a на b с остатком, т. е. представляют $a = bp + t$, причем p, t — целые и $0 \leqslant t < b$.

Если $t = 0$, то НОД будет число b.

Если $t \neq 0$, то делят число b на t с остатком, получают новый остаток и т. д., пока не получат остаток, равный 0.

Отыскание НОД данной пары чисел, если второе число отлично от нуля, сводится к отысканию НОД другой пары чисел, являющихся делителем и остатком при делении первого на второе число в предыдущей паре чисел.

Составим программу, реализующую алгоритм Евклида. Для этого примем обозначения:

a и b — исходные числа и $a > b \geqslant 0$,

НОД обозначает искомый наибольший общий делитель чисел a и b,

ЧАСТНОЕ — частное от деления числа a на b,

ОСТАТОК — остаток от деления a на b.

В этих обозначениях алгоритм можно представить так:

1. Если $b = 0$, то положить НОД равным a и вычисления закончить.
2. Если $b \neq 0$, то найти частное и остаток от деления a на b, т. е. ЧАСТНОЕ и ОСТАТОК.
3. $a := b$; $b :=$ ОСТАТОК и перейти к пункту 1.

Программа

```
1.  begin integer a, b, НОД, ЧАСТНОЕ, ОСТАТОК;
2.      ввод (a, b);
3.  M: if b = 0 then НОД := a else
4.      begin ЧАСТНОЕ := a ÷ b;
5.            ОСТАТОК: = a — b × ЧАСТНОЕ;
```

```
6.              a := b;
7.              b := ОСТАТОК;
8.              goto M
9.          end;
10.     вывод (НОД)
11. end
```

В этой программе условный оператор помечен меткой M. Условный оператор начинается строкой 3 и заканчивается строкой 9. Если $b = 0$, то $НОД := a$, работа условного оператора закончится и будет работать оператор вывода в конце программы. Если же $b \neq 0$, то будет выполняться стоящий после **else** составной оператор (строки 4—9), в котором содержится пять операторов: вычисление частного и остатка от деления a на b, засылка в a и b соответственно значений делителя и остатка, переход к оператору с меткой M.

В условном операторе содержится оператор **goto** M, который означает выход из условного оператора и переход к оператору с меткой M, т. е. опять к началу рассматриваемого условного оператора. Так как в алгоритме Евклида каждый последующий остаток строго меньше предыдущего, то в некоторый момент b станет равным нулю и произойдет выход из условного оператора к следующему за ним оператору вывода.

Задача. Проверить, является ли данное целое число a простым.

Для этой цели надо проверить, нет ли у этого числа делителей, отличных от 1 и a. Причем достаточно проверить делители от числа 2 до числа $sqrt\ (a + 1)$. Здесь извлекается корень из числа $a + 1$, а не из a в связи с приближенным представлением результата функции вычисления квадратного корня, чтобы не пропустить делитель, точный квадрат которого равен a.

Примем следующие обозначения: a—данное число; p— признак, $p = 1$ в случае, если a — простое, и $p = 0$ в случае, если a — составное; t — текущее значение делителя, параметр цикла.

Программа

```
1.  begin integer a, p, t, c;
2.  ввод (a);
3.  p := 1;
4.  for t := 2 step 1 until sqrt (a + 1) do
        begin c := a/t;
5.          if a = c × t then
6.              begin p := 0; goto выход end end;
7.  выход: вывод (p);
8.  end
```

Работа программы происходит следующим образом. Сначала задаем $p = 1$, предполагая a простым (строка 3). В операторе цикла (строки 4—6) проверяются делители 2, 3, ... до целого числа, не большего $\sqrt{a + 1}$. Если среди этих чисел нет делителей числа a,

то после работы оператора цикла p останется равным 1. Если же найдется такой делитель t, то в строке 6 в составном операторе p получит значение 0 и затем будет выход из оператора — переход к метке «*выход*» вне оператора цикла (строка 7).

З а д а ч а. Сформировать и напечатать четырехзначные номера, сумма двух первых цифр которых равна сумме двух последних.

Составим программу, приняв следующие обозначения:

m — текущий номер;

$ц1$, $ц2$, $ц3$, $ц4$ — обозначения цифр 4-значного номера, параметры цикла.

П р о г р а м м а

```
1.  begin integer m, ц1, ц2, ц3, ц4;
2.      for ц1 := 0 step 1 until 9 do
3.          for ц2 := 0 step 1 until 9 do
4.              for ц3 := 0 step 1 until 9 do
5.                  for ц4: = 0 step 1 until 9 do
6.                      if ц1 + ц2 = ц3 + ц4 then
7.                          begin  m := ц1 × 10 ↑ 3 + ц2 × 10 ↑ 2
                                       + ц3 × 10 + ц4;
8.                                 вывод (m)
9.                          end
10. end
```

Поясним структуру оператора цикла.

Оператор цикла занимает строки 2—9. В цикле по параметру $ц1$ выполняется оператор цикла — строки 3—9. В цикле по параметру $ц2$ выполняется оператор цикла — строки 4—9. В цикле по параметру $ц3$ выполняется оператор цикла — строки 5—9. В цикле по параметру $ц4$ выполняется условный оператор — строки 6—9. Этот условный оператор выполнится 10 000 раз.

В условном операторе проверяется равенство суммы двух левых цифр с суммой двух правых цифр — строка 6.

В случае, если суммы цифр совпадают, то работает составной оператор, стоящий за символом **then** и расположенный в строках 7—9. В этом операторе из выбранных цифр формируется искомый номер и этот номер печатается.

Если же суммы цифр не совпадают, то условный оператор никаких действий не производит. Его работа, таким образом, в этом случае сводится лишь к проверке условия. Далее будет продолжение работы оператора цикла по выбору нового значения соответствующего параметра цикла.

Выводиться на печать будут номера в виде чисел: 0, 101, 110, 202, 211, 220, ..., 9889, 9898, 9999

Обратим внимание на структуру этой программы.

Программа оформлена в виде блока (строки 1—10). Этот блок состоит из одного описания (строка 1) и одного оператора цикла (строки 2—9). Этот оператор цикла состоит из нескольких операторов цикла, вложенных друг в друга. В самом внутреннем, в самом «глубоком» операторе цикла содержится условный оператор

сокращенной формы, в котором имеется составной оператор, состоящий из оператора присваивания и оператора вывода. Как видим, структура программы достаточно сложна.

Ступенчатая форма записи позволяет более наглядно представить структуру программы. Как правило, некоторая составная часть какого-либо оператора располагается в следующей строке с бо́льшим смещением в правую часть строки по отношению к началу этого оператора. Так, у нас оператор присваивания и оператор вывода смещены вправо по отношению к началу составного оператора. Составной оператор расположен правее начала условного оператора и т. д. Наиболее четко выделяются ступени в операторах цикла, входящих друг в друга.

Вычисление значения многочлена. З а д а ч а. Вычислить значение многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

для конкретного значения x.

При составлении программы вычисления значения многочлена примем следующие обозначения:

a — массив коэффициентов;
x — переменная;
n — степень многочлена;
y — искомое значение многочлена;
i — параметр цикла.

П р о г р а м м а

```
1.  begin real x, y; integer n, i; ввод (n, x);
2.   begin real array a [0 : n]; ввод (a);
3.         y := 0;
4.      for i := 0 step 1 until n do
5.                    y := y + a [i] × x ↑ i;
6.         вывод (y, x);
7.  end end
```

В этой программе для каждого значения i вычисляется очередное слагаемое и прибавляется к сумме. В цикле вычисляются все слагаемые. Если в строке 3 записать оператор $y := a\,[0]$, тогда в операторе цикла параметр можно изменять не от 0, а от 1, т. е. в цикле начинать вычисление со слагаемого a_1x. Однако такая программа не является рациональной, так как для каждого значения i происходит вычисление степени x^i, т. е. производятся лишние вычисления.

Можно составить более экономную программу, в которой для вычисления степени x^{k+1} используется ранее вычисленное значение x^k. Для хранения значения степени x^k надо иметь еще одну переменную, обозначим ее через t. Первоначально ей задается значение 1.

П р о г р а м м а

```
1.  begin real x, y, t; integer n, i; ввод (n, x);
2.      begin real array a [0: n]; ввод (a);
```

```
3.  y := a [0]; t:= 1;
4.        for i := 1 step 1 until n do
5.  begin t := t × x; y := y + a [i] × t end;
6.           вывод (y, x);
7.  end end
```

Эта программа менее наглядна, чем предыдущая программа, но зато более экономна.

Рассмотрим еще один вариант вычисления значения многочлена, в котором используется схема Горнера. В этом случае многочлен представим в виде:

$$(\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Здесь вычисления ведутся со старшего коэффициента. Этот коэффициент a_n заносится в результат. В цикле происходит умножение предыдущего результата на x и прибавление следующего коэффициента. В этом случае не нужна переменная для накопления степени x. Составим программу вычисления значения многочлена по схеме Горнера.

Программа

```
1.  begin real x, y; integer n, i; ввод (n, x);
2.   begin real array a [0 : n]; ввод (a);
3.              y := a [n];
4.       for i := n — 1 step — 1 until 0 do
5.              y := y × x +a [i];
6.          вывод (y, x);
7.  end end
```

В этой программе параметр цикла изменяется с шагом — 1 от n — 1 до 0. Возьмем конкретное значение n, например $n = 3$, и проследим за работой программы.

После ввода n определяется длина массива коэффициентов и вводятся значения коэффициентов a [0], a [1], a [2], a [3].

В строке 3 результату y присваивается начальное значение $y := a$ [3].

Далее начинает работать оператор цикла (строки 4—5). В цикле параметр цикла i пробегает значения 2, 1, 0. Рассмотрим, как формируется результат в операторе цикла.

$i = 2$ $\quad y = a\,[3] \times x + a\,[2]$

$i = 1$ $\quad y = (a\,[3] \times x + a\,[2]) \times x + a\,[1]$

$i = 0$ $\quad y = ((a\,[3] \times x + a\,[2]) \times x + a\,[1]) \times x + a\,[0]$

Таким образом, вычисляется значение многочлена:

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Из приведенных здесь трех программ последняя является более экономной по сравнению с первыми двумя программами как

в смысле экономии вычислений, так и по количеству используемых в ней переменных.

Отметим частные случаи. Если $n = 0$, то $y = a_0$, массив a состоит из одного элемента, x не используется, цикл работает вхолостую. Если $n = 1$, то $y = a_1x + a_0$. Если $n = 2$, то вычисляется значение квадратного трехчлена.

Задача. Вычислить значения многочлена для заданного массива значений x.

Воспользуемся прежними обозначениями, только вместо простой переменной y используем массив результатов, который обозначим через y, а вместо переменной x — соответственно массив x. Появится еще одна переменная, указывающая количество элементов в массивах x и y, обозначим ее через p.

Для вычисления нескольких значений многочлена мы воспользуемся алгоритмом вычисления одного значения, данным в предыдущей программе. С этой целью мы образуем внешний цикл с параметром k, принимающим значения от 1 до p с шагом 1. Программа примет следующий вид:

Программа

```
1.  begin integer n, p, i, k; ввод (n, p);
2.  begin real array a [0 : n], x, y [1 : p]; ввод (a, x);
3.    for k := 1 step 1 until p do
4.              begin y [k] := a [n];
5.                    for i := n — 1 step — 1 until 0 do
6.                        y [k] := y [k] × x [k] + a [i]
7.              end;
8.    вывод (y, x);
9.  end end
```

В этой программе вычисление одного значения многочлена для текущего значения x осуществляется с помощью составного оператора (строки 4—7). Оператор цикла (строки 3—7) осуществляет вычисление всех значений многочлена для всех значений x. После работы оператора цикла будет вывод массива значений многочлена и массива x. Таким образом, для p значений x будет получено p значений многочлена.

Приближенное вычисление квадратного корня из числа.

Задача. Найти приближенное значение квадратного корня из положительного числа методом последовательных приближений.

Для вычисления $y = \sqrt{x}$ в АЛГОЛе существует стандартная функция, т. е. можно записать: $y = sqrt\,(x)$. Такая запись означает обращение к специальной программе вычисления корня квадратного каким-либо приближенным методом. Одним из таких методов является метод последовательных приближений с использованием следующего рекуррентного соотношения:

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right),\ n = 2, 3, 4,...$$

y_1 — первое приближение корня.

По этому соотношению получается последовательность значений:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots,$$

все более приближающихся к искомому значению корня с увеличением n. Вычисления заканчиваются при выполнении отношения

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \varepsilon$$

В качестве приближенного значения корня берется y_n. При составлении программы примем следующие обозначения:

x — число, из которого извлекается корень;

e — точность вычисления;

ус — начальное приближение, затем *ус* будет содержать предыдущее значение корня при переходе к последующему;

ун — значение корня, вычисленное по формуле (последующее значение), затем используется как результат.

Составим программу в этих обозначениях.

Программа

```
1. begin real x, yc, yn, e;
2. ввод (x, yc, e);
3. повторение: yn := (yc + x/yc)/2;
4. if abs (yn — yc) ⩽ e then goto выход;
5. yc := yn;
6. goto повторение;
7. выход: вывод (x, yn)
8. end
```

В строке 3 вычисляется следующее значение корня по предыдущему значению, т. е. вычисляется значение *ун* по значению *ус*. В строке 4 осуществляется проверка на точность и выход в случае достижения желаемой точности — переход к оператору с меткой «*выход*», т. е. к оператору вывода значений *x* и *ун* в конце программы. Если же точность не достигнута, то вновь вычисленное значение *ун* засылается в переменную *ус*, т. е. заново считается начальным или предыдущим. Управление передается на оператор с меткой «*повторение*», т. е. на продолжение счета (на строку 3).

В некоторых случаях выводят всю последовательность приближенных значений, чтобы получить представление о том, насколько хорошо идет процесс вычисления корня. С этой целью можно было включить оператор вывода значения *ус*, например, в конце строки 5. Можно также завести счетчик числа повторений и в конце вместе с выводом результата вывести значение этого счетчика, т. е. количество приближенных значений.

Одномерные массивы. Задача 1. Расположить числа данного массива в обратном порядке.

Примем следующие обозначения:

a — массив;
t — число его элементов;
p — параметр цикла;
b — вспомогательная переменная.

Программа

```
1.  begin integer t, p; real b; ввод (t);
2.   begin real array a [1 : t]; ввод (a);
3.      for p := 1 step 1 until t/2 do
4.       begin b := a [p]; a [p] := a [t — p + 1];
                          a [t — p + 1] := b end;
5.   вывод (a);
6.  end end
```

По этой программе первый элемент меняется с последним, второй — с предпоследним и т. д. до середины. Если массив содержит нечетное количество элементов, то средний остается без изменения. Индекс $t - p + 1$ для $p = 1, 2, \ldots$ формирует номера соответствующих элементов с конца, т. е. номера $t, t - 1, \ldots$.

Задача 2. Проверить, упорядочен ли массив по возрастанию.

Воспользуемся обозначениями предыдущей программы, причем переменную b используем в виде признака: $b = 0$, если массив упорядочен, и $b = 1$, если массив не упорядочен.

Программа

```
1.  begin integer t, p, b; ввод (t);
2.   begin real array a [1 : t]; ввод (a);
3.        b := 0;
4.     for p := 1 step 1 until t — 1 do
5.       if a [p] > a [p + 1] then
6.         begin b := 1; goto M end;
7. M: вывод (b);
8.  end end
```

Задача 3. В данном массиве поменять местами элементы, стоящие на нечетных местах, с элементами, стоящими на четных местах.

Программа

```
1. begin integer t, p; real b; ввод (t);
2.   begin real array a [1 : t]; ввод (a);
3.     for p := 1 step 2 until t do
4.       begin b := a [p]; a [p] := a [p + 1]; a [p + 1] := b end;
5.   вывод (a);
6.  end end
```

В этой программе t предполагается четным, а параметр цикла p принимает нечетные значения 1, 3, ..., $t - 1$.

Задача 4. Найти сумму элементов, стоящих на четных местах в заданном массиве. Искомую сумму обозначим переменной b.

Программа

```
1.  begin integer t, p; real b; ввод (t);
2.  begin real array a [1 : t]; ввод (a);
3.        b := 0;
```

```
4.  for p := 2 step 2 until t do
5.  b := b + a [p];
6.    вывод (b);
7.  end end
```

Для этой программы несущественна четность величины t. Если t четное, то p принимает значения 2, 4, 6, ..., t. Если же t нечетное, то p принимает значения 2, 4, 6, ..., $t - 1$. В том и в другом случае происходит суммирование элементов, стоящих на четных местах в данном массиве.

Задача 5. Элементы массива a записать в виде массивов b и c, причем в массив b записать элементы, стоящие на нечетных местах в массиве a, а в массив c записать элементы, стоящие на четных местах в массиве a. Пусть длина массивов b и c равна t, соответственно длина массива a будет $2t$.

Программа

```
1.  begin integer t, p; ввод (t);
2.   begin real array b, c [1 : t], a [1 : 2 × t]; ввод (a);
3.     for p := 1 step 1 until t do
4.     begin b [p] := a [2 × p — 1];  c [p] := a [2 × p] end;
5.      вывод (b, c);
6.  end end
```

Задача 6. Объединить элементы массивов b и c, содержащих по t элементов, в массив a таким образом, чтобы в массиве a на нечетных местах были элементы массива b, а на четных местах — элементы массива c.

Эта задача является обратной предыдущей задаче разбиения массива a на массивы b и c. Воспользуемся теми же обозначениями.

Программа

```
1.  begin integer t, p; ввод (t);
2.    begin real array b, c [1 : t], a [1 : 2 × t]; ввод (a);
3.       for p := 1 step 1 until t do
4.       begin a [2 × p — 1] := b [p];  a [2 × p] := c [p] end;
5.       вывод (a);
6.  end end
```

Двумерные массивы. Рассматривая, например, систему трех уравнений с тремя неизвестными, мы можем обозначить коэффициенты уравнения различными буквами. Это не всегда удобно, особенно при рассмотрении систем с большим числом уравнений. Чаще всего коэффициенты системы уравнений обозначают одной буквой с двумя индексами. Первый индекс — номер уравнения, второй — номер неизвестного в данном уравнении. Пусть дана система уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Коэффициенты этой системы образуют конечную последовательность чисел: a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, ..., a_{33}. В АЛГОЛе такие последова-

тельности представляются в виде двумерных массивов. Переменные этих массивов снабжаются двумя индексами, помещенными в квадратных скобках после обозначения массива. Двумерные массивы удобно изображать в виде матриц:

$$\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] \\ a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] \end{pmatrix}$$

Матрица состоит в нашем случае из 3 строк и 3 столбцов. Первый индекс переменной соответствует номеру строки матрицы, а второй индекс — номеру столбца матрицы.

Примеров использования переменных с двумя индексами, т. е. двумерных массивов, много. Так, мы можем иметь массив точек с двумя координатами, массив полей шахматной доски и т. д.

Описания двумерных массивов составляются так же, как и описания одномерных массивов, только в квадратных скобках вместо одной пары чисел, дающих пределы изменения индекса переменной, указываются две пары чисел, дающих пределы изменения соответственно первого и второго индексов переменной. Примеры описаний:

1. **real array** a [1 : 3, 1 : 3]
2. **real array** a [1 : 3, 1 : 3], b [1 : 3]
3. **integer array** A [1 : 8, 1 : 8]
4. **real array** d [1 : t, 1 : t]
5. **real array** e [1 : t, 1 : p]
6. **real array** f [1 : $a + b$, 1 : $x - y$)

1 — описание массива вещественных чисел, состоящего из 9 чисел (матрица, состоящая из трех строк и трех столбцов).

2 — описание двумерного массива a и одномерного массива b.

3 — описание массива целых чисел A (матрица из восьми строк и восьми столбцов).

4 — описание массива d — матрицы из t строк и t столбцов.

5 — описание массива e (прямоугольная матрица, содержащая t строк и p столбцов).

6 — описание массива f, в котором имеется $a + b$ строк и $x - y$ столбцов.

Если в операторе ввода или вывода встретится идентификатор двумерного массива, то это будет означать ввод или вывод чисел двумерного массива. При записи двумерного массива числа записываются строка за строкой. Если массив имеет t строк и p столбцов, то первые p элементов — это первая строка, следующие p элементов — вторая строка и т. д. — всего будет t строк по p элементов.

З а д а ч а 1. Вычислить сумму элементов квадратной матрицы третьего порядка.

Обозначим через a массив элементов матрицы, через s — сумму, через i — текущий номер строки, через j — текущий номер столбца (i, j — параметры циклов).

Программа

```
1.  begin integer i, j; real s;
2.      real array a [1 : 3, 1 : 3]; ввод (a); s := 0;
3.        for i := 1 step 1 until 3 do
4.          for j := 1 step 1 until 3 do
5.        s := s + a [i, j];
6.      вывод (s);
7.  end
```

В этой программе в операторе цикла (строки 3—5) происходит суммирование всех элементов матрицы. Внешний цикл фиксирует значение параметра i, что соответствует номеру строки матрицы, и для каждого этого значения выполняется внутренний цикл по параметру j, в этом внутреннем цикле происходит перебор всех элементов рассматриваемой строки и их суммирование.

Так, при $i = 1$ и $j = 1, 2, 3$ будет найдена сумма элементов 1-й строки матрицы. При $i = 2$ и $j = 1, 2, 3$ сумма дополнится суммой элементов второй строки. При $i = 3$ и $j = 1, 2, 3$ просуммируются и элементы последней строки матрицы.

В описании массива a указаны границы изменения двух индексов: первый — от 1 до 3 и второй — от 1 до 3. Оператором ввода массива a будут введены все 9 чисел массива a, представляющих собой матрицу с 3 строками и 3 столбцами.

Задача 2. Вычислить суммы элементов строк матрицы a, состоящей из t строк и p столбцов. Результат выдать в виде одномерного массива s, состоящего соответственно из t элементов.

Программа

```
1.  begin integer i, j, t, p;
2.      ввод (t, p);
3.      begin real array a [1 : t, 1 : p], s [1 : t];
4.        ввод (a);
5.        for i := 1 step 1 until t do
6.            begin s [i] := 0;
7.                for j := 1 step 1 until p do
8.                    s [i] := s [i] + a [i, j];
9.            end;
10.       вывод (s)
11. end end
```

Оператор цикла с параметром i расположен в строках 5—9. Для каждого значения i, т. е. для каждой строки, выполняется составной оператор (строки 6—9). В составном операторе задается значение 0 для суммы соответствующей строки. Затем с помощью оператора цикла по параметру j суммируются элементы i-й строки.

В конце работы внешнего цикла будут подсчитаны суммы всех t строк матрицы, т. е. будет получен результат в массиве s.

Если бы мы рассматривали квадратную матрицу, имеющую t строк и t столбцов, то задача упростилась бы. В программе можно было бы обойтись без переменной p, а в описании массивов и в операторах цикла вместо значения p использовать значение t.

Упражнения

1. Описать с помощью условного оператора задачу выяснения, принадлежит ли данное число a отрезку [1, 10]. Если a принадлежит этому отрезку, то напечатать число 1; если нет, то напечатать число 0.

2. Описать с помощью условного оператора вычисление значения функции, определенной следующим образом:

$$y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x < -3 \\ x, & \text{если } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ x + 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

3. Что будет напечатано в результате работы следующей программы:

```
begin
    integer i, S;
     S := 0;
     i := 2;
M :  S := S + i ↑ 2;
     i := i + 2;
     if i < 10 then goto M;
       вывод (i, S)
end
```

4. Составить программу вычисления среднего арифметического и среднего геометрического двух данных чисел.

5. Составить программу вычисления суммы членов арифметической прогрессии (задать необходимые исходные данные).

6. Составить программу, которая из трех данных чисел определит наибольшее число. Как изменится программа, если задать поиск наименьшего из трех данных чисел?

7. Составить программу вычисления суммы кубов целых чисел от 11 до 20. Как изменится программа, если необходимо найти сумму кубов нечетных чисел от 11 до 20?

8. Составить программу вычисления значений функции $y = x^3$ для заданных p значений аргумента.

9. Составить программу вычисления значений функции $y = \sqrt{x}$ для значений x от 1 до 3 с шагом 0,01.

10. Рассмотреть программу и ответить, какая задача решается этой программой:

```
begin real a, b, c, M;
ввод (a, b, c);
M := a;
if b > M then M := b;
if c > M then M := c;
вывод (M, a, b, c);
end
```

11. По координатам точки, лежащей на плоскости, определить принадлежность ее квадрату со стороной, равной 2, который расположен так, что начало координат находится в точке пересечения

диагоналей, а стороны параллельны осям координат. Составить программу решения этой задачи.

12. Составить программу, проверяющую, кратно ли число p числу t. Если t — делитель числа p, то узнать кратность делителя.

13. Составить программу, определяющую, является ли данное число m составным.

14. Составить программу получения всех делителей данного числа n, включая делители 1 и n.

15. Сколько чисел, кратных числу d, находится в данном массиве? Составить программу для этого подсчета.

16. Составить программу вычисления значений квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ по данным значениям a, b, c и для заданных t значений x. Значения аргумента образуют массив из t чисел.

17. В некотором массиве чисел определить количество чисел, больших данного числа (составить программу).

18. Сколько четных чисел в данном массиве чисел (написать программу)?

19. Составить программу поиска наибольшего и наименьшего элементов в данном массиве чисел.

20. Написать программу, определяющую, сколько положительных и сколько отрицательных чисел в данном массиве.

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ

Изучение математики в школе наряду с изложением конкретных сведений (формулы для решения квадратного уравнения, теоремы сложения для синуса, теоремы Пифагора и т. д.) ставит своей задачей выработку навыков математического мышления. Именно эти навыки окажутся наиболее важными для выпускников средней школы в их практической деятельности. Для овладения такими навыками необходимо знание основных понятий, лежащих в основе математики (множество, отношение, соответствие, число, алгебраическая операция и т. д.).

С примерами отношений и соответствий учащиеся встречаются почти во всех школьных курсах — математики, физики, химии, истории, географии и т. д. Однако общие свойства этих фундаментальных понятий в школьных программах почти не упоминаются, хотя само понятие отношения рассматривают в VI классе в связи с изучением функций. Целью факультативного курса «Бинарные отношения и соответствия» и является изложение этих общих свойств, рассмотрение общих понятий, касающихся соответствий и отношений, их частных случаев и т. д.

При этом основное внимание обращено на выяснение универсальной приложимости изучаемых понятий, на разбор различных примеров отношений и соответствий из окружающего мира и на выяснение их свойств. Но, разумеется, не следует упускать из виду и их роль в математике. Поэтому особо изучаются свойства таких отношений, как параллельность и перпендикулярность прямых линий, делимость натуральных чисел, равносильность уравнений, конгруэнтность и подобие геометрических фигур.

СООТВЕТСТВИЯ

1. Примеры соответствий. В курсе математики вы уже встречались с различными множествами: числовыми множествами (например, множеством N натуральных чисел, множеством Q рациональных чисел, множеством P простых чисел и т. д.), геометрическими фигурами (они являются множествами точек), множествами геометрических фигур (множеством треугольников, множеством кругов и т. д.), множествами алгебраических выражений и т. д. Примеры множеств встречаются и в других школьных предметах: в биологии — множества живых организмов (виды, роды, отряды,

типы и т. д.), в грамматике — множества частей речи и членов предложения, в географии — множества точек земной поверхности (параллели и меридианы, изотермы, изобары и т. д.).

Вы уже знакомы с такими операциями над множествами, как пересечение и объединение, умеете разбивать множества на попарно непересекающиеся подмножества, а также применять такие разбиения для классификации объектов.

Между элементами множеств существуют различные соответствия. Например, если X — множество чисел, а Y — множество многочленов, то между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ можно рассматривать такие соответствия:

а) число x является корнем многочлена y;

б) число x — степень многочлена y;

в) число x — свободный член многочлена y;

г) число x — сумма корней многочлена y.

Если X — множество прямых, а Y — множество окружностей, то можно рассматривать такие соответствия между $x \in X$ и $y \in Y$:

а) прямая x касается окружности y;

б) прямая x пересекает окружность y в двух точках;

в) прямая x проходит через центр окружности y.

Между элементами множества X существительных и множества Y прилагательных в грамматике рассматривают соответствия:

а) существительное x согласуется с прилагательным y в роде;

б) существительное x согласуется с прилагательным y в числе;

в) существительное x согласуется с прилагательным y в падеже.

Многочисленные примеры соответствий дают география, физика, химия и другие предметы. Обычно построение математической модели какого-нибудь явления начинается с того, что выделяют связанные с ним множества элементов и указывают соответствия между элементами этих множеств. Например, при построении математической модели производства надо выделить множества станков, инструментов, изготовляемых деталей, технологических операций и т. д. После этого вводят такие соответствия, как «операция x выполняется на станке y», «заготовку x подвергают операции y» и т. д.

Эти соответствия должен иметь в виду технолог, разрабатывающий процесс обработки детали. Он должен при этом учитывать загрузку станков, последовательность операций, выполняемых над каждой деталью, и многое другое. Это было не слишком сложно сделать, когда технология была сравнительно простой. Но с расширением масштабов производства, усложнением внутрипроизводственных связей стало все труднее учитывать многообразные связи между операциями, деталями, станками и т. д. Возникла проблема автоматизации управления производством с помощью быстродействующих вычислительных машин. Но чтобы вычислительная машина могла учесть все соответствия, надо задать их в «понятном» для нее виде. Обычная речь для этого не годится, и потребовалось использовать формализованное понятие соответствия.

Упражнение

1. Укажите известные вам соответствия между элементами следующих множеств:

а) множество людей и множество городов;

б) множество учителей и множество школьников;

в) множество треугольников и множество чисел;

г) множество треугольников и множество окружностей;

д) множество точек плоскости и множество пар чисел.

2. **График и граф соответствия.** Прежде чем давать определение соответствия в общем виде, разберем следующий пример. Пусть множество X состоит из слов {зеленый, глубокое, веселая, хорошее}, а множество Y — из слов {море, луг, окно, свет}. Между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ можно рассмотреть соответствие «слово x согласуется со словом y в роде». Чтобы задать это соответствие, не углубляясь в грамматику, поступим следующим образом: составим все пары (x, y), где x — одно из слов множества X, а y — одно из слов множества Y, после чего подчеркнем те пары, в которых слова x и y согласуются в роде. Можно составить всего 16 пар: (зеленый, море), (зеленый, луг), (зеленый, окно), (зеленый, свет), (глубокое, море), (глубокое, луг), (глубокое, окно), (глубокое, свет), (веселая, море), (веселая, луг), (веселая, окно), (веселая, свет), (хорошее, море), (хорошее, луг), (хорошее, окно), (хорошее, свет).

Таким образом, нам удалось задать соответствие «согласовано в роде» между элементами множеств X и Y, указав подмножество {(зеленый, луг), (зеленый, свет), (глубокое, море), (глубокое, окно), (хорошее, море), (хорошее, окно)} в множестве всех пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$. Таким же образом можно задать любое соответствие R между некоторыми множествами[1] X и Y. Для этого надо взять множество всевозможных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$, и отметить в нем подмножество Г, состоящее из пар элементов, для которых данное соответствие имеет место.

Как известно, в математике множество, состоящее из всех пар вида (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, называют *декартовым произведением* множеств X и Y и обозначают $X \times Y$ (см. с. 21). Например, указанные выше 16 пар образуют декартово произведение множеств X = {зеленый, глубокое, веселая, хорошее} и Y = {море, луг, окно, свет}. Итак, соответствие R между множествами X и Y задается указанием подмножества Г декартова произведения $X \times Y$. Это подмножество называют *графиком* соответствия R. Множество X называют *областью отправления* данного соответствия, а множество Y — его *областью прибытия*.

---

[1] Для краткости мы будем говорить в дальнейшем «соответствие между множествами», а не между элементами множеств.

Может случиться, что два соответствия между множествами X и Y имеют один и тот же график. Например, если $X = \{20, 40, 2, 1\}$ и $Y = \{4, 5, 10\}$, то соответствия $x > y$ и «x делится на y» между этими множествами имеют один и тот же график:

$$\{(20, 4), (20, 5), (20, 10), (40, 4), (40, 5), (40, 10)\}.$$

Одинаковые графики имеют и соответствия «прямая x касается окружности y» и «расстояние прямой x от центра окружности y равно радиусу этой окружности».

В теории множеств два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, независимо от того, какими свойствами определены эти множества. Подобно этому в теории соответствий считают два соответствия между множествами X и Y совпадающими, если их графики равны. С этой точки зрения соответствие между множествами X и Y есть не что иное, как тройка множеств (X, Y, Γ), где $\Gamma \subset X \times Y$.

Если множества X и Y конечны, их декартово произведение можно наглядно изобразить в виде таблицы, столбцы которой «нумеруются» элементами множества X, а строки — элементами множества Y. График соответствия между множествами X и Y при этом изображается совокупностью заштрихованных клеток таблицы.

Например, зададим таблицей соответствие «в день недели дежурит учащийся y» (табл. 1). Из этой таблицы видно, что в понедельник дежурят Алексеев и Жильцов, а во вторник — Бочкарева и Зимина.

Данное выше формальное определение соответствия как тройки множеств (X, Y, Γ) удобно в теоретических исследованиях. Однако практически такое задание соответствий применимо лишь в случае, когда множества X и Y конечны (и притом содержат не слишком много элементов). Если же эти множества бесконечны (например, если X — множество прямых, а Y — множество окружностей), декартово произведение $X \times Y$ становится необозримым, равно как и график соответствия, и приходится прибегать к иным способам описания соответствий.

Таблица 1

График дежурств

	пон.	вт.	ср.	четв.	пят.	суб.
Алексеев	▨				▨	
Бочкарева		▨				▨
Васильев			▨			
Гринченко				▨		
Долидзе				▨		
Евгеньева			▨			
Жильцов	▨					▨
Зимина		▨			▨	

Для наглядного изображения соответствий между конечными множествами применяют также *графы*. Для этого элементы каждого из множеств X, Y изображают точками на плоскости, после чего проводят стрелки от x к y, если (x, y) принадлежит графику данного соответствия.

Например, на рисунке 1 изображен граф отношения «число x делится на число y» для множеств $X = \{20, 40, 2, 14\}$ и $Y = \{4, 3, 10\}$.

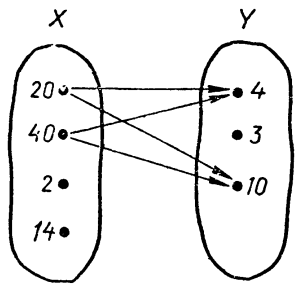


Рис. 1.

Многие соответствия обозначаются специальными знаками, поставленными между элементами x и y. Например, соответствие «прямая x параллельна прямой y» обозначают $x \parallel y$, а соответствие «прямая x перпендикулярна прямой y» — так: $x \perp y$. Здесь $\parallel$ и $\perp$ — знаки для обозначения параллельности и перпендикулярности соответственно. Точно так же знаком $\cong$ обозначают конгруэнтность фигур, знаком $>$ — соответствие «больше» и т. д. Поэтому в общей теории соответствий пишут xRy, чтобы обозначить, что элементы x и y находятся в соответствии R.

Упражнения

2. Постройте граф соответствия «больше» для множеств $X = \{2, 4, 6\}$ и $Y = \{1, 3, 5\}$.

3. Какие из следующих математических символов являются знаками соответствий, а какие — обозначениями действий?

а) $>$	д) $\leqslant$	и) $<$	н) $:$	с) $\cong$
б) $\neq$	е) $-$	к) $\subset$	о) $\times$	т) $\{\ \}$
в) $<$	ж) $\parallel$	л) $\cap$	п) $\cup$	у) $\vdots$
г) $\perp$	з) $+$	м) $\cong$	р) $\in$	

4. Для множеств $X = \{25, 16, 7, 6\}$ и $Y = \{5, 2, 3, 9, 1\}$ задайте график соответствия «делится на». Постройте граф этого соответствия.

5. Пусть $X = \{$мама, папа, рама, яма$\}$ и $Y = \{$а, м, р, п, ф, я$\}$. Запишите график соответствия «в слово x входит буква y» и постройте граф этого соответствия.

6. По рисунку 2 составьте график и граф соответствия «прямая касается окружности». По тому же рисунку составьте график и граф соответствия «прямая пересекает окружность в двух точках».

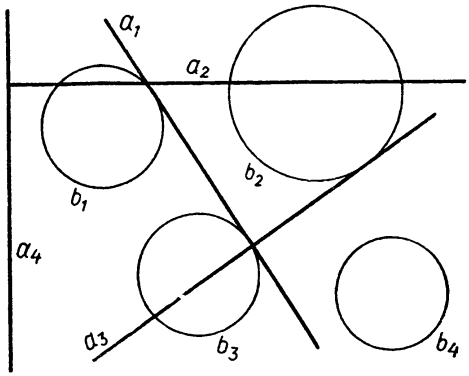


Рис. 2.

7. В таблице 2 указан график соответствия «выиграл у» для участников шахматного турнира. По этому графику напишите таблицу результатов турнира. Кто победил в турнире, кто оказался на последнем месте? Составьте график соответствия «сделал ничью с».

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6
1. Михайлов		▨			▨	
2. Петров				▨		
3. Омельченко	▨				▨	
4. Айвазян			▨			
5. Павлов						
6. Кравков		▨	▨	▨	▨	

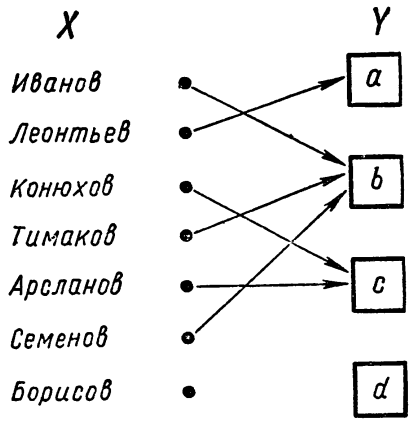


Рис. 3.

8. На рисунке 3 изображен граф соответствия «живет в» между множеством X людей и множеством Y домов. Составьте график этого соответствия. Кто живет в одном доме с Ивановым?

9. По рисунку 4 составьте график и граф соответствия «вписан в» между множествами X треугольников и Y окружностей.

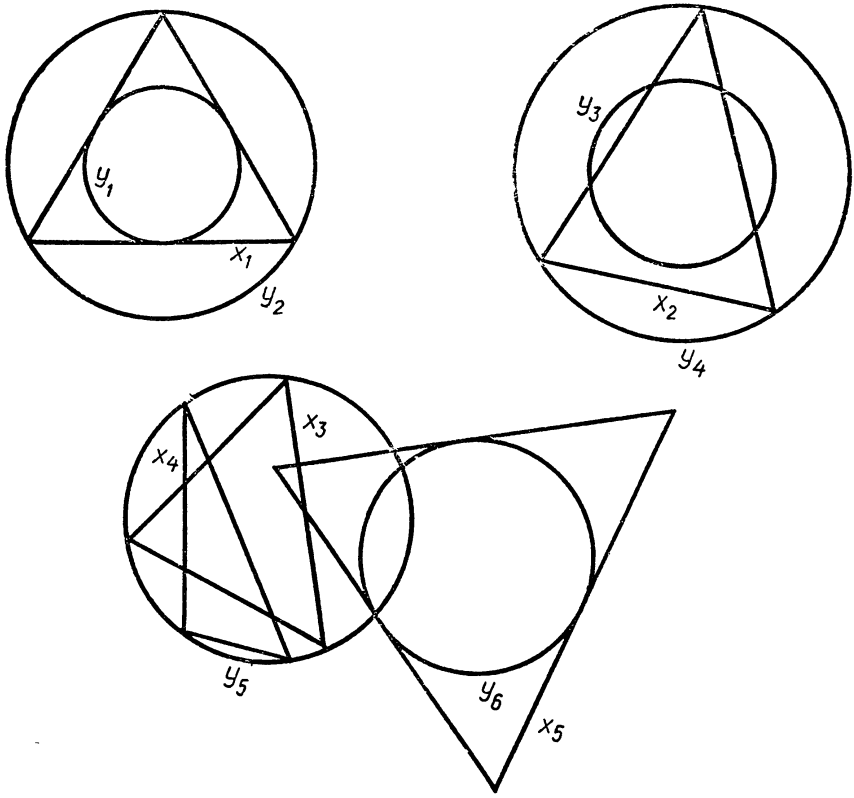


Рис. 4.

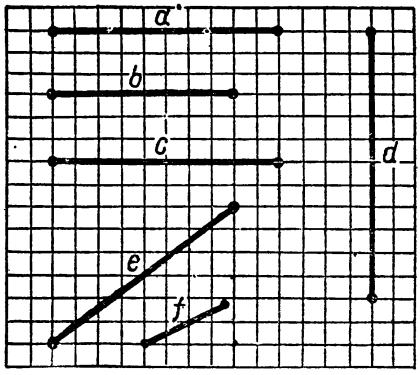


Рис. 5.

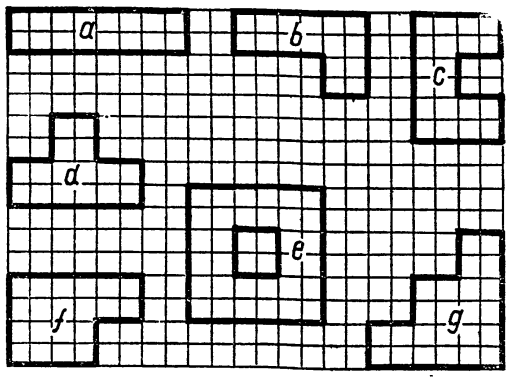


Рис. 6.

По тому же рисунку составьте график и граф соответствия «вписана в» для множества Y окружностей и X треугольников. Составьте график и граф соответствия «описана около» между множеством окружностей и множеством треугольников.

10. По рисунку 5 составьте график и граф соответствия «имеет длину» (в клеточках) между множествами X отрезков и Y чисел. Какие отрезки имеют ту же длину, что и отрезок a?

11. По рисунку 6 составьте график и граф соответствия «имеет площадь» между множеством геометрических фигур и множеством чисел. Какие фигуры равновелики с прямоугольником a?

12. В русском языке существительные, местоимения и прилагательные изменяются по падежам и числам (единственное и множественное), а прилагательные и местоимения еще и по родам. Иногда грамматические формы одного и того же слова совпадают. Например, слово «солдат» можно понимать и как именительный падеж единственного числа (солдат вошел в дом), и как родительный или винительный падеж множественного числа (взвод солдат или я увидел солдат). Для каждого из следующих слов найдите все соответствующие ему грамматические формы (например, «красным»→{твор. падеж ед. числа, мужск. и ср. рода, дат. падеж множ. числа, мужск., ср. и женск. рода}: уроке, стол, братьев, рукава, этих, планетарии, меду, синим, рту, луку, вещества, круг, людей, человеке, красным, гении.

3. Числовые соответствия. Выше говорилось, что табличное изображение соответствий между бесконечными множествами невозможно. В большинстве случаев соответствия между бесконечными множествами удается задать как соответствия между двумя числовыми множествами или между множествами, состоящими из некоторых наборов чисел. Пусть, например, X — множество точек плоскости и Y — множество окружностей с центром в точке O. Рассмотрим соответствие «точка A принадлежит окружности α». Чтобы задать это соответствие графиком, пришлось бы взять декартово произведение множеств X и Y и отметить в нем все пары

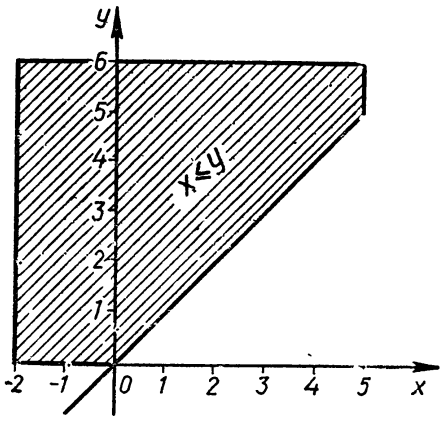


Рис. 7.

(A, α), состоящие из таких точек A и окружностей α, что точка A принадлежит окружности α. Но это невозможно сделать. Введем на плоскости систему координат, для которой точка O служит началом координат, тогда точки будут задаваться парами чисел (абсциссой и ординатой), а окружности — числом R—длиной радиуса. Чтобы узнать, принадлежит ли точка $A\,(x, y)$ окружности $\alpha\,(R)$, достаточно вычислить расстояние между точкой и центром окружности и посмотреть, равно ли оно радиусу окружности. Применим формулу для расстояния между точками координатной плоскости:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Получим запись изучаемого соответствия в виде равенства

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

связызающего три числа x, y, R.

Точно так же соответствие «точка A лежит внутри окружности α» задается числовым неравенством $x^2 + y^2 < R^2$.

В случае, когда соответствие выражается соотношением между двумя числами, его можно изобразить некоторым множеством на координатной плоскости, состоящим из точек $A\,(a, b)$, при подстановке координат которых в это соотношение получается истинное высказывание. Это точечное множество также называют графиком данного соответствия.

Пусть X и Y — множества действительных чисел. Изобразим точечный график соответствия $x = y$. Для этого надо взять все точки на плоскости, ордината которых равна их абсциссе. Эти точки лежат на биссектрисе первого и третьего координатных углов. А график соответствия $x \leqslant y$ между теми же множествами состоит из точек, лежащих на этой биссектрисе, и точек, расположенных выше нее.

График соответствия $x \leqslant y$ между множествами $X = \{x | -2 \leqslant x \leqslant 5\}$ и $Y = \{y | 0 \leqslant y \leqslant 6\}$ изображен на рисунке 7.

К изображению соответствий множествами на координатной плоскости прибегают и в случае, когда области отправления и прибытия конечны или же бесконечны, но могут быть перенумерованы (такие множества называют *счетными*). В этом случае нумеруют элементы множеств X и Y:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}.$$

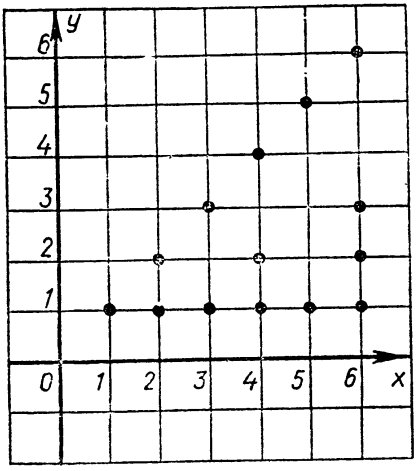


Рис. 8.

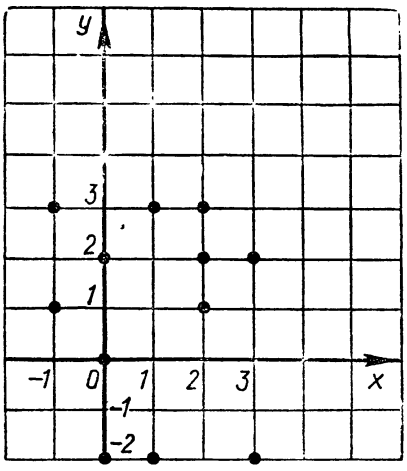


Рис. 9.

После этого пару (x_i, y_j) изображают точкой координатной плоскости, имеющей координаты i и j. Достаточно отметить точки (i, j) плоскости, для которых $x_i R y_j$, чтобы получить наглядное изображение изучаемого соответствия.

Например, изобразим соответствие «делится на» в множестве натуральных чисел. Для этого достаточно отметить такие точки $A(m, n)$, что m и n — натуральные числа, причем m делится на n. Часть этого графика показана на рисунке 8.

Упражнения

13. Постройте графики следующих соответствий (здесь X и Y — множество действительных чисел):

а) $x^2 + y^2 \leqslant 25$; в) $x^2 \leqslant y$;

б) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 \geqslant 25$; г) $x^2 + 4y = 4$.

14. Постройте графики тех же соответствий, если:

а) X — множество действительных чисел, а Y — множество целых чисел;

б) X и Y — множество целых чисел.

15. Постройте график соответствия $x^2 + y^2 \leqslant 25$, если $X = \{x | -1 \leqslant x \leqslant 4\}$ и $Y = \{y | -4 \leqslant y \leqslant 4\}$.

16. Изобразите точечный график соответствия $y = x + 4$, если $X = \{-1, 1, 3, 5\}$, $Y = \{3, 7, 8, 9, 10\}$.

17. На рисунке 9 изображен точечный график соответствия. Постройте граф этого соответствия.

18. На рисунке 10 изображен граф соответствия между числами. Постройте график этого соответствия.

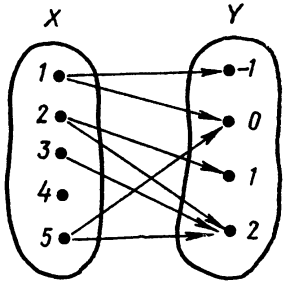


Рис. 10.

4. Образ и полный прообраз. Область задания и множество значений соответст-

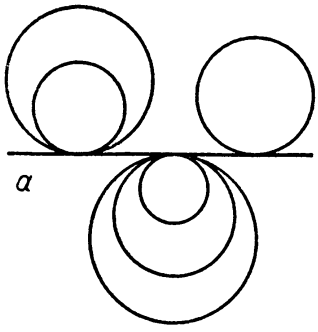


Рис. 11.

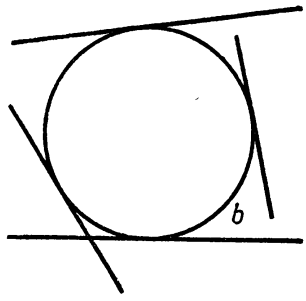


Рис. 12.

вия. Пусть X — множество деталей, изготовляемых на заводе, а Y — множество станков на этом заводе. Пусть xRy обозначает, что деталь x обрабатывается на станке y[1]. В процессе изготовления детали ее надо обрабатывать на различных станках. Кроме этого, на одном и том же станке могут обрабатываться различные детали. Поэтому если взять какую-нибудь деталь a, то ей соответствует множество $R(a)$, состоящее из станков, на которых ее обрабатывали. Точно так же, если взять станок b, то ему соответствует множество $R^{-1}(b)$, состоящее из деталей, которые обрабатывали на этом станке. Множество $R(a)$ называют образом детали a при соответствии R, а множество $R^{-1}(b)$ —полным прообразом станка b при том же соответствии.

Определим эти понятия в общем виде. Пусть R — соответствие между множествами X и Y и a — элемент из X. Назовем образом этого элемента множество $R(a)$ всех $y \in Y$, таких, что aRy. *Полным прообразом* элемента $b \in Y$ при том же соответствии назовем множество $R^{-1}(b)$ элементов $x \in X$, таких, что xRb.

Например, если X — множество прямых на плоскости, Y — множество окружностей на той же плоскости и R — соответствие «касается», то $R(a)$ состоит из всех окружностей, которых касается данная прямая a (рис. 11), а $R^{-1}(b)$ — из всех прямых, касающихся данной окружности b (рис. 12).

Если множества X и Y конечны и соответствие R между ними изображено графом, то $R(a)$ состоит из концов всех стрелок, начинающихся в точке a, а $R^{-1}(b)$ — из начал всех стрелок, оканчивающихся в точке b.

Любому подмножеству A множества X соответствует его образ $R(A)$ в Y. Этот образ является объединением образов всех элементов из A, т. е.

$$R(A) = \bigcup_{a \in A} R(a).$$

Образ всего множества X при этом соответствии называют *множеством значений* соответствия R и обозначают $R(X)$. Если соответствие R задано графом, то $R(X)$ состоит из концов всех стрелок графа.

---

[1] Иногда мы будем определять не само отношение R, а смысл обозначения xRy.

Точно так же любому подмножеству B множества Y соответствует его полный прообраз $R^{-1}(B)$ — объединение полных прообразов всех элементов из B. Иными словами,

$$R^{-1}(B) = \bigcup_{b \in B} R^{-1}(b).$$

Полный прообраз всего множества Y при соответствии R называют *областью определения* этого соответствия и обозначают $R^{-1}(Y)$. Если соответствие R задано графом, то областью его определения является множество начал всех стрелок.

Например, если соответствие R задано графом на рисунке 13, то его областью определения является множество $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, а областью значений — множество $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Если соответствие R задано подмножеством Г координатной плоскости, то областью задания R является проекция Г на ось абсцисс, а множеством значений — проекция Г на ось ординат (рис. 14).

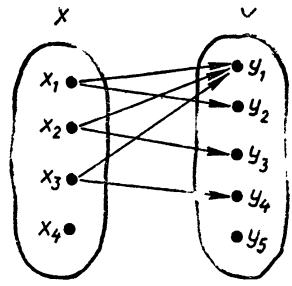


Рис. 13.

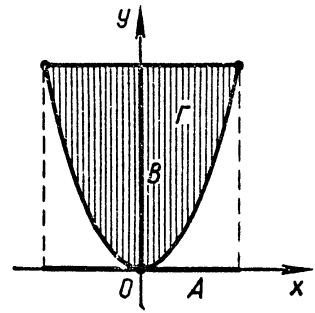


Рис. 14.

Упражнения

19. Найдите образ числа 4 для соответствия из упражнения 2. Для того же соответствия найдите полный прообраз числа 5.

20. Найдите образ числа 6 для соответствия из упражнения 4. Для того же соответствия найдите полный прообраз числа 2. Какой элемент имеет пустой прообраз? Для какого элемента полный прообраз совпадает со всем множеством X? Найдите область определения и множество значений этого соответствия.

21. Для соответствия из упражнения 5 найдите образ слова «мама» и полный прообраз буквы «м». Найдите букву с пустым прообразом.

22. Укажите полный прообраз дома a из упражнения 8. Какие элементы входят в этот прообраз? Есть ли дома в этом соответствии, в которых не живут люди из множества X? Есть ли в этом соответствии люди, не живущие в домах множества Y?

23. Пусть X — множество учащихся в классе, Y — множество парт в том же классе. Каждому учащемуся сопоставляется парта, за которой он сидит. Что такое полный прообраз данной парты? Что такое образ множества всех учащихся?

24. По таблице из упражнения 7 найдите участника с пустым прообразом. Кому проиграл этот участник турнира; с кем он сделал ничью?

25. Что такое полный прообраз данной окружности при соответствии «вписан» между треугольниками и окружностями? Из скольких элементов состоит образ данного треугольника?

26. Задано соответствие «вписан» между четырехугольниками и окружностями. Для каких четырехугольников их образ непуст?

27. Найдите образ множества треугольников при соответствии «периметр треугольника x равен числу y» между множеством X треугольников и множеством Y действительных чисел.

5. Виды соответствий. Может случиться, что область определения соответствия R совпадает с его областью отправления X, т. е. что для любого $a \in X$ найдется такое $y \in Y$, что aRy. В этом случае говорят, что соответствие R *всюду определено*. Например, соответствие «вписан» определено на всем множестве треугольников — для любого треугольника a найдется окружность y, в которую он вписан. Но то же самое соответствие «вписан» определено не на всем множестве четырехугольников: лишь четырехугольники, у которых сумма величин противоположных углов равна 180°, вписаны в некоторую окружность.

Если область значений соответствия R совпадает с его областью прибытия, то говорят, что это соответствие *сюръективно* (от французского предлога «sur» — «на»). В этом случае каждый элемент b из Y является образом какого-нибудь элемента x из X. Например, соответствие «периметр треугольника x равен числу y» сюръективно, если X — множество треугольников, а Y — множество положительных чисел. В самом деле, для любого положительного числа b найдется треугольник с периметром b. Но это же соответствие не будет сюръективным, если Y — множество всех действительных чисел, так как периметр треугольника должен быть положительным числом.

Соответствие «касается» между множеством X прямых и множеством Y окружностей всюду определено и сюръективно: каждая прямая касается какой-нибудь окружности и каждой окружности касается какая-нибудь прямая.

Если соответствие задано своим графом и всюду определено, то из каждой точки множества X выходит хоть одна стрелка. Если же оно сюръективно, то каждая точка множества Y является концом какой-нибудь стрелки (рис. 15).

Соответствия можно различать и по числу элементов в образах и полных прообразах элементов. Если при соответствии R образ каждого элемента $x \in X$ или пуст, или содержит лишь один элемент, то R называют *функциональным соответствием* или *отображением* из X в Y. Иными словами, соответствие R функционально, если из того, что xRy_1 и xRy_2, можно сделать вывод: $y_1 = y_2$. Таким образом, в графе функционального соответствия нет расходящихся стрелок, он та-

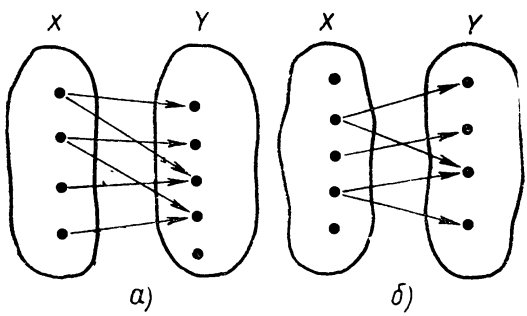


Рис. 15.

ков, как на рисунке 16,—из каждой точки множества X не выходит ни одной стрелки или выходит одна стрелка.

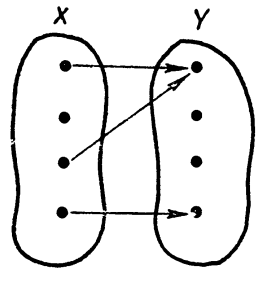


Рис. 16.

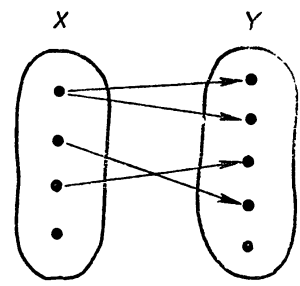


Рис. 17.

Всюду определенное функциональное соответствие называют *отображением множества X в множество Y*. Таким образом, R является отображением X в Y, если для любого $x \in X$ найдется одно и только одно $y \in Y$, такое, что xRy. Этот элемент y и является образом x при отображении R, $y=R(x)$. Если отображение X в Y сюръективно, его называют отображением множества X *на* множество Y.

Например, соответствие, сопоставляющее каждому треугольнику описанную вокруг него окружность, является отображением множества X треугольников на множество Y окружностей. В то же время такое же соответствие между множеством Z четырехугольников и множеством Y окружностей является лишь функциональным соответствием или отображением из Z в Y — в этом случае есть четырехугольники, вокруг которых нельзя описать ни одной окружности, но если уж для какого-нибудь четырехугольника существует описанная окружность, то только одна. Это соответствие сюръективно.

Наконец, бывают соответствия, при которых полный прообраз любого элемента $y \in Y$ либо пуст, либо содержит лишь один элемент. Иными словами, для таких соответствий из x_1Ry и x_2Ry следует: $x_1 = x_2$. Эти соответствия называют *инъективными*. Граф инъективных соответствий не может содержать стрелок, сходящихся в одной точке, т. е. таков, как на рисунке 17.

Например, соответствие «сидит за» между множеством X учащихся и множеством Y столов не является инъективным, так как за одним и тем же столом могут сидеть несколько учащихся. А соответствие «число x является периметром треугольника y» инъективно, так как два различных числа не могут быть периметрами одного и того же треугольника. Инъективные отображения называют *обратимыми*.

Соответствие, обладающее всеми четырьмя свойствами (т. е. всюду определенное, сюръективное, функциональное и инъективное), называется *биективным*. Иными словами, R биективно, если оно является отображением X в Y, таким, что образ X совпадает с Y и никакие два элемента из X не переходят в один и тот же элемент из Y. Граф биективного соответствия показан на рисунке 18.

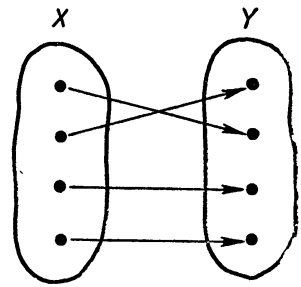
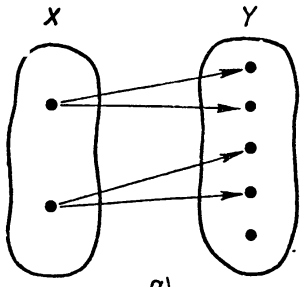
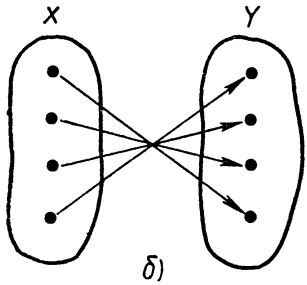


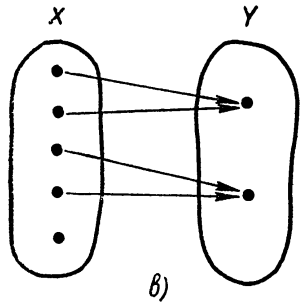
Рис. 18.



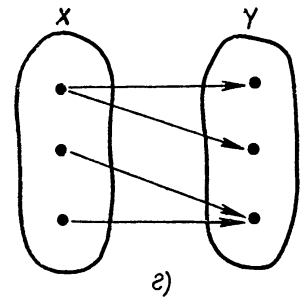
а)



б)



в)



г)

Рис. 19.

Упражнения

28. Начертите граф соответствия:

а) всюду определенного, функционального и инъективного, но не сюръективного;

б) функционального, инъективного и сюръективного, но не всюду определенного;

в) всюду определенного, инъективного и сюръективного, но не функционального;

г) всюду определенного, функционального и сюръективного, но не инъективного;

д) сюръективного и функционального, но не всюду определенного и не инъективного;

е) сюръективного и инъективного, но не всюду определенного и не функционального.

29. На рисунке 19 изображены графы некоторых соответствий. Какие из этих соответствий всюду определены, какие сюръективны, какие функциональны и какие инъективны? Какие из этих соответствий биективны?

30. Является ли соответствие $y = x^2$ между множеством $\boldsymbol{R}$ действительных чисел и множеством $\boldsymbol{R}_0$ неотрицательных чисел: а) всюду определенным, б) сюръективным, в) функциональным, г) инъективным? Обладает ли какими-либо из этих свойств соответствие $y = x^2$ между $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}$; между $\boldsymbol{R}_0$ и $\boldsymbol{R}_0$?

31. Поставим в соответствие каждому натуральному числу x его остаток y при делении на 3. Этим определяется соответствие R между множествами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ («остаток от деления на 3 равен y»). Является ли это соответствие отображением $\boldsymbol{N}$ в $\boldsymbol{N}_0$? Найдите полный прообраз числа 0 при этом соответствии. Всюду ли определено оно? Функционально ли оно? Инъективно ли это соответствие?

32. Пусть X — множество всех натуральных чисел, кроме числа 1. Обозначим через R соответствие «делится». Является ли это соответствие отображением X в X? Сюръективно ли оно? Инъективно ли оно? Функционально ли оно? Всюду ли оно определено? Ответьте на те же вопро-

сы, если X — множество простых чисел.

33. Пусть X — множество имен {Андрей, Миша, Алеша, Костя, Вася, Кира, Валя, Сема, Маня, Соня, Оля, Толя, Юра} и Y — множество букв русского алфавита. Сопоставим каждому имени его первую букву. Является ли полученное соответствие отображением X в Y? Инъективно ли оно? Сюръективно ли оно? Всюду ли оно определено? Найдите образ X и полный прообраз буквы «А». Найдите полный прообраз множества согласных букв. Для каких букв полный прообраз будет пустым, даже если X — множество всех русских имен?

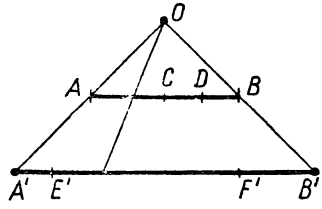


Рис. 20.

34. Даны множества $A = \{a, б, в\}$ и $B = \{1, 2\}$. Установите биективное соответствие между множествами $A \times B$ и $B \times A$.

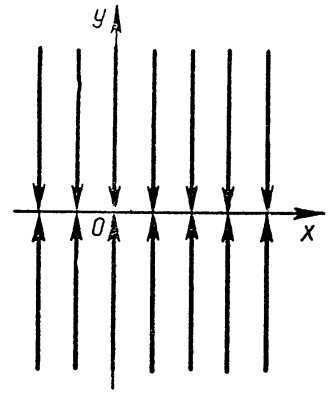


Рис. 21.

35. Множество X состоит из всех квадратов на плоскости, а множество Y — из всех окружностей на той же плоскости. Каждому квадрату x сопоставляется вписанная в него окружность. Является ли это соответствие отображением X в Y? Инъективно ли оно? Что является полным прообразом данной окружности? Станет ли это соответствие инъективным, если заменить X на множество Z квадратов, стороны которых параллельны осям координат?

36. Между точками отрезков AB и $A'B'$ установлено соответствие так, как показано на рисунке 20. Найдите образ отрезка CD и полный прообраз отрезка $E'F'$ при этом соответствии. Является ли это соответствие биективным?

37. Обозначим через R соответствие между точками координатной плоскости и точками оси абсцисс, при котором каждой точке плоскости сопоставляется ее проекция на ось абсцисс (рис. 21). Функционально ли это соответствие? Всюду ли оно определено? Инъективно ли и сюръективно ли оно? Является ли оно биективным? Постройте окружность радиуса 5 с центром в начале координат и найдите ее образ при этом соответствии. Найдите полный прообраз отрезка $[-5, 5]$ при этом соответствии.

38. Пусть X — множество гласных букв русского алфавита, а Y — множество согласных букв. Через R обозначим соответствие «стоит непосредственно перед». Является ли это соответствие отображением X в Y? Всюду ли оно определено? Инъективно ли оно? Сюръективно ли оно? Каков образ множества X при этом соответствии? Ответьте на те же вопросы для соответствия «стоит непосредственно за».

39. Постройте график отображения $x \to x^2$, если X и Y — множество целых чисел. Инъективно ли это отображение? Сюръективно ли оно? Ответьте на те же вопросы в случае, когда X и Y — множество натуральных чисел.

6. Следствия из соответствий. Рассмотрим два соответствия между множеством X прямых на плоскости и множеством Y окружностей на той же плоскости:

R: «прямая проходит через центр окружности»

и

S: «прямая пересекает окружность в двух точках».

Очевидно, что если для какой-нибудь пары (x, y) выполняется соответствие R (т. е. прямая x проходит через центр окружности y), то выполняется и соответствие S (т. е. прямая x пересекает окружность y в двух точках). Иными словами, из xRy следует, что xSy. Таким образом, соответствие S является следствием соответствия R.

Вообще, будем говорить, что соответствие S между множествами X и Y является *следствием* соответствия R между теми же множествами, если из того, что xRy, вытекает, что xSy. Это означает, что из $(x, y) \in \Gamma_R$ следует $(x, y) \in \Gamma_S$, где Γ_R и Γ_S — графики соответствий R и S. Иными словами, соответствие S является следствием соответствия R, если его график содержит график соответствия R, $\Gamma_R \subset \Gamma_S$. Будем писать в этом случае: $R \subset S$.

Соответствие с пустым графиком называют *пустым соответствием*, а соответствие, графиком которого является все декартово произведение $X \times Y$, — *полным соответствием*. Очевидно, что полное соответствие является следствием любого соответствия R, а любое соответствие — следствием пустого соответствия $\varnothing$. В самом деле,

$$\varnothing \subset \Gamma_R \subset X \times Y.$$

Упражнения

40. Пусть X — множество мужчин, Y — множество всех людей. Является ли соответствие xRy: «x—отец y» — следствием соответствия xSy: «x — дед y»?

Является ли для тех же множеств X и Y соответствие «x — потомок y» следствием соответствия «x — сын y»?

41. Какие из следующих соответствий являются следствиями других: многоугольники x и y а) конгруэнтны; б) равновелики; в) подобны; г) имеют одинаковые периметры; д) имеют одинаковое число сторон; е) симметричны относительно прямой l.

42. Пусть X — множество прямых на плоскости, Y — множество окружностей на той же плоскости. Является ли соответствие «прямая имеет общие точки с окружностью» следствием соответствия «прямая касается окружности»? Является ли соответствие «прямая касается окружности» следствием соответствия «прямая удалена от центра окружности на расстояние, равное радиусу этой окружности»? Является ли соответствие «прямая пересекает окружность» следствием соответствия «расстояние прямой от центра окружности равно половине радиуса»?

43. Является ли соответствие «число x делится на y» следствием соответствия «x делится на $2y$»? А соответствия «$2x$ делится на y»? Является ли соответствие «число x делится на число y» следствием соответствия «сумма цифр числа x делится на y»?

7. Операции над соответствиями. Чтобы применять соответствия для разбора конкретных задач, надо уметь получать из одних соответствий другие, т. е. выполнять операции над соответствиями (ведь и от чисел не было бы большой пользы, если бы люди не умели складывать, вычитать, умножать, делить их и делать другие операции над ними). Некоторые операции над соответствиями сводятся к уже известным операциям над множествами — пересечению, объединению, взятию дополнения. Дело в том, что соответствия между множествами X и Y задаются своими графиками, т. е. некоторыми подмножествами декартова произведения $X \times Y$, а над этими графиками можно делать различные операции.

Пусть, например, X и Y — множество людей, а R и S — соответствия «быть отцом» и «быть матерью» соответственно. Вместо «отец» и «мать» можно ввести общее понятие «родитель». Тогда появляется новое соответствие «быть родителем», которое мы обозначим T. Ясно, что x является родителем y в том и только в том случае, когда x или отец y, или мать y. Значит, график соответствия T получается путем объединения графиков соответствий R и S. Естественно называть его объединением этих соответствий и обозначить $R \cup S$.

Вообще, пусть заданы два соответствия R и S между множествами X и Y. Объединением соответствий называют соответствие $R \cup S$ между теми же множествами. График соответствия $R \cup S$ является объединением графиков соответствий R и S. Символически это можно записать так:

$$\Gamma_{R \cup S} = \Gamma_R \cup \Gamma_S.$$

Если соответствия R и S заданы графами, то получить граф их объединения совсем просто — надо взять стрелки первого и второго графа.

А теперь пусть X — множество людей и Y — множество кинофильмов. Рассмотрим два соответствия между этими множествами: пусть xRy означает, что x был автором сценария фильма y, а xSy — что x был режиссером этого фильма. Иногда бывает, что режиссер снимает кинофильм по своему сценарию (например, лауреат Ленинской премии В. М. Шукшин был и автором сценария, и режиссером кинофильма «Калина красная»). Тогда возникает новое соответствие T — «быть автором сценария и режиссером фильма». При этом xTy в том и только в том случае, когда и xRy, и xSy. Иными словами, пара (x, y) попадает в график соответствия T лишь в том случае, когда она принадлежит и графику соответствия R, и графику соответствия S, т. е. график для T является пересечением графиков для R и для S. Естественно назвать само соответствие пересечением соответствий R и S и обозначить его $R \cap S$.

Вообще, пусть заданы два соответствия R и S между множествами X и Y. Их *пересечением* называют соответствие $R \cap S$ между теми же множествами, график которого является пересечением графиков соответствий R и S. Символически это можно записать так:

$$\Gamma_{R \cap S} = \Gamma_R \cap \Gamma_S.$$

Если соответствия Γ_R и Γ_S заданы графами, то, чтобы получить граф их пересечения, надо взять стрелки, принадлежащие сразу обоим графам.

Пересечение соответствий «быть отцом» и «быть матерью» пусто, так как один и тот же человек x не может одновременно быть и отцом, и матерью человека y. Такие соответствия мы будем называть *несовместными*. Иными словами, соответствия R и S между множествами X и Y несовместны, если их пересечение — пустое соответствие $\varnothing$. Например, несовместны соответствия «меньше» и «больше» — ни для каких двух x и y не могут одновременно выполняться условия: $x < y$ и $x > y$. А соответствия «не больше» и «не меньше» совместны: если $x = y$, то оба они выполняются.

Каждое уравнение или неравенство с двумя переменными является числовым соответствием. Если два таких уравнения или неравенства совместны, они образуют совместную систему. Ее решением называют пересечение графиков этих уравнений или неравенств. Если же они несовместны, то это пересечение пусто и система не имеет решения (множество ее решений пусто).

Например, соответствия $x + y = 7$ и $x^2 + y^2 = 29$ совместны, а соответствия $x^2 + y^2 = 3$ и $2x^2 + 2y^2 = 10$ несовместны. Это означает, что система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

совместна (имеет решения (2; 5) и (5; 2)), а система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ 2x^2 + 2y^2 = 10 \end{cases}$$

несовместна.

Для каждого соответствия R можно найти противоположное ему соответствие $\overline{R}$, т. е. такое соответствие, что $x\overline{R}y$ в том и только в том случае, когда не выполняется xRy. Например, соответствию «касаться» между прямыми и окружностями противоположно соответствие «не касаться», а соответствию «иметь пустое пересечение» противоположно «иметь непустое пересечение».

Из определения противоположных соответствий видно, что их графики взаимно дополнительны в декартовом произведении $X \times Y$. Поэтому если $\overline{R}$ противоположно R, то R в свою очередь противоположно $\overline{R}$. Любые два противоположных соответствия несовместны. Обратное, однако, неверно — встречаются несовместные, но не противоположные соответствия. Например, выше было

показано, что соответствия «быть отцом» и «быть матерью» несовместные. Но они не являются противоположными, так как легко найти пару людей (x, y), такую, что x не является ни отцом, ни матерью y. А если R и $\overline{R}$ — противоположные соответствия, то для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется одно и только одно из условий: xRy, $x\overline{R}y$.

Упражнения

44. Пусть X — множество прилагательных, а Y — множество существительных. Совместны ли соответствия «согласовано в роде» и «не согласовано в числе»?

45. Пусть X — множество прямых и Y — множество окружностей. Совместны ли соответствия «касается» и «проходит через центр»? А соответствия «пересекает» и «проходит через центр»?

46. Докажите, что если соответствие R непусто и S — следствие R, то R и S совместны.

47. Найдите соответствие, противоположное «является корнем» для множества X действительных чисел и множества Y уравнений.

48. Противоположны ли соответствия «касается» и «пересекает в двух точках» между множеством прямых и множеством окружностей?

49. Противоположны ли соответствия «вписан» и «описан» между множеством треугольников и множеством окружностей? Совместны ли эти соответствия?

50. Совместны ли соответствия $x^2 + y^2 \leqslant 9$ и $(x - 10)^2 + y^2 \leqslant 16$?

51. Совместны ли соответствия «параллельна» и «перпендикулярна»? Противоположны ли они, если X и Y —множества всех прямых на плоскости? Противоположны ли они, если X и Y — множества прямых, параллельных координатным осям?

52. Пусть X — множество прямых линий и Y — множество парабол. Найдите пересечение соответствий «прямая проходит через вершину параболы» и «прямая параллельна оси симметрии параболы». Является ли это пересечение всюду определенным? А функциональным? Инъективно ли оно? Сюръективно ли оно? Ответьте на те же вопросы для заданных соответствий.

53. На рисунке 22 изображены графы соответствий R и S. Постройте графы соответствий $R \cup S$ и $R \cap S$, а также соответствий $R \cap \overline{S}$ и $\overline{R} \cap \overline{S}$.

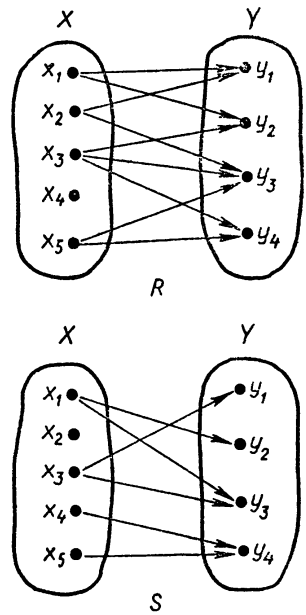


Рис. 22.

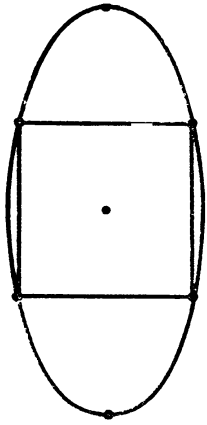


Рис. 23.

8. Сужение соответствий. Пусть X — множество многоугольников, а Y — множество замкнутых кривых. Обозначим через R соответствие «вписан в» между этими множествами. Множество A треугольников является подмножеством в X, а множество B окружностей — подмножеством Y. Рассматривая соответствие «вписан в» лишь для треугольников и окружностей, получаем новое соответствие S. Хотя оно формулируется теми же самыми словами, оно отличается от соответствия R. Например, графику соответствия R принадлежит изображенная на рисунке 23 пара, состоящая из квадрата и эллипса. Но эта пара не принадлежит графику соответствия S — в него входят лишь пары, состоящие из треугольников и описанных вокруг них окружностей. Мы будем говорить, что S получилось при сужении соответствия R на A и B. График нового соответствия S получается, если пересечь график Γ_R соответствия R с декартовым произведением $A \times B$, т. е., проще говоря, выбрав из Γ_R все пары (a, b) такие, что a — треугольник и b — окружность.

Вообще, пусть R — соответствие между множествами X и Y, Γ_R — его график, и пусть $A \subset X$ и $B \subset Y$. Назовем *сужением* R на подмножества A и B соответствие S между A и B, графиком которого является пересечение Γ_R с $A \times B$ (т. е. множество таких пар (a, b), что $(a, b) \in \Gamma_R$, причем $a \in A$ и $b \in B$).

Иногда называют заданное соответствие R *расширением* S на X и Y. Но надо иметь в виду, что сужение R на A и B определено однозначно, а расширение не является однозначно определенным. Дело в том, что если задан график соответствия R, то его пересечение с $A \times B$ однозначно определено. Но если задан график Γ_S соответствия S, то существует много подмножеств в $X \times Y$, пересекающихся с $A \times B$ по подмножеству Γ_S.

Упражнения

54. На рисунке 24 изображен граф соответствия R между множествами X и Y. Начертите граф сужения этого соответствия на подмножества $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

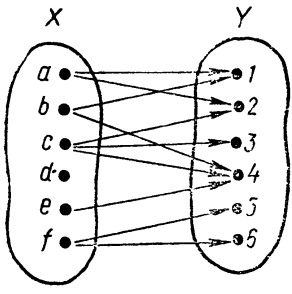


Рис. 24.

55. Пусть X — множество многоугольников и Y — множество действительных чисел, а xRy — соответствие «периметр многоугольника x равен числу y». Что будет сужением этого соответствия на множество квадратов?

56. Пусть R — соответствие с областью отправления X и областью прибытия Y, A — его область определения и B — множество значений. Докажите, что график R

совпадает с графиком его сужения на подмножества A и B.

57. Пусть X и Y — множество натуральных чисел и R — соответствие «делится на». Обозначим через A подмножество в X, состоящее из простых чисел, и через S — сужение R на A. Найдите область значений соответствия S.

58. Пусть $X = Y$ — множество всех людей и A — множество женщин. Между X и Y задано соответствие «x — ребенок y». Что будет сужением этого соответствия на $A \subset X$? Что будет сужением этого соответствия на $A \subset Y$? Кем будет в этом случае $a \in A$?

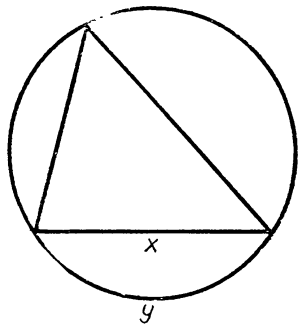


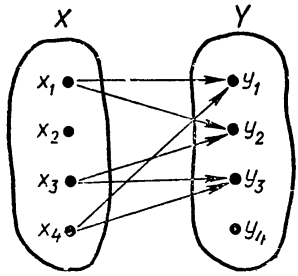
Рис. 25.

9. Обратное соответствие. Рисунок 25 можно двояко описать словами: «треугольник x вписан в окружность y» и «окружность y описана вокруг треугольника x». Хотя смысл этих предложений один и тот же, речь в них идет о хотя и тесно связанных друг с другом, но разных соответствиях. В первом случае речь идет о соответствии между множеством X треугольников и множеством Y окружностей, а во втором — о соответствии между множествами Y и X. Иными словами, при переходе от одного соответствия к другому множества X и Y меняются местами. Это видно и из грамматического разбора наших предложений. В первом из них подлежащее — «треугольник», а дополнение — «окружность», а во втором роли этих слов меняются. Графики этих двух соответствий связаны друг с другом следующим образом: если пара (x, y) принадлежит графику первого соответствия (т. е. если треугольник x вписан в окружность y), то пара (y, x) принадлежит графику второго соответствия (т. е. окружность y описана около треугольника x), и обратно. Такие два соответствия называются обратными друг другу. Обратны друг другу и соответствия «число x является делителем числа y» и «число y кратно числу x».

Вообще, если R — соответствие между множествами X и Y, то *обратным* ему называется такое соответствие R^{-1} между Y и X, что $y\ R^{-1}x$ в том и только в том случае, когда xRy. Разумеется, соответствием, обратным R^{-1}, снова является R.

Иногда в обычном языке обратные друг другу соответствия называются одним и тем же словом. Например, если X — множество прямых, Y — множество окружностей, а R — отношение «касается», то и R^{-1} называется тем же словом «касается». Но в первом случае прямая x касается окружности y, а во втором окружность y касается прямой x. Ясно, что окружность y касается прямой x в том и только в том случае, когда прямая x касается окружности y.

Чтобы получить график соответствия R^{-1}, обратного соответствию R, надо в каждой паре (x, y) графика R переставить местами x и y. Например, если $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, причем



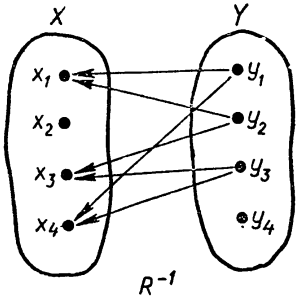


Рис. 26.

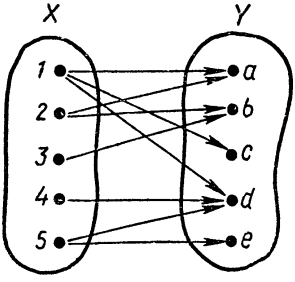


Рис. 27.

X \ Y	a	b	c
1			
2			
3			
4			
5			

Рис. 28.

$\Gamma_R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_3, y_3)\}$, то

$\Gamma_{R^{-1}} = \{(y_1, x_1), (y_2, x_1), (y_2, x_2), (y_2, x_3), (y_3, x_3)\}$.

В случае, когда соответствие R задано графом, для получения графа обратного соответствия R^{-1} надо поменять направления всех стрелок (рис. 26).

Упражнения

59. По графу соответствия R (рис. 27) начертите граф обратного соответствия R^{-1}. Найдите $R^{-1}(b)$.

60. По графику соответствия R (рис. 28) начертите график обратного соответствия R^{-1}. Найдите $R^{-1}(a)$.

61. Пусть X — множество многоугольников, а Y — множество действительных чисел и xRy—соответствие «площадь многоугольника x равна y». Как формулируется обратное соответствие R^{-1}, противоположное соответствие $\overline{R}$ и соответствие, обратное противоположному $(\overline{R})^{-1}$? Совпадает ли последнее соответствие с противоположным обратному?

62. Как, зная граф соответствия R, построить граф соответствия, противоположного обратному, т. е. $\overline{(R^{-1})}$?

63. Какое соответствие обратно соответствию «число x является корнем многочлена y»?

64. Для соответствия «человек x прочел книгу y» постройте обратное и противоположное.

65. Найдите обратное и противоположное соответствия для «деталь x обрабатывается на станке y».

66. Докажите, что если соответствие R всюду определено, то обратное ему соответствие R^{-1} сюръективно.

67. Докажите, что если R сюръективно, то R^{-1} всюду определено.

68. Докажите, что если соответствие R инъективно, то R^{-1} функционально.

69. Докажите, что если R функционально, то R^{-1} инъективно.

70. Обратно ли соответствие «x— брат y» соответствию «y — сестра x», если

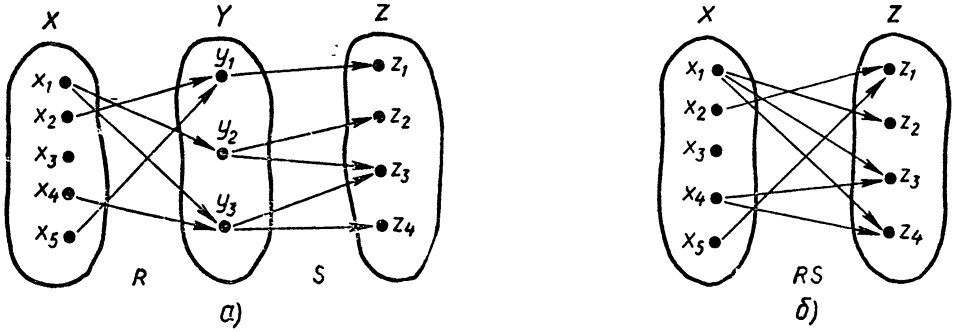


Рис. 29.

X и Y — множества всех людей? Обратны ли эти соответствия, если X — множество мужчин, а Y — множество женщин?

71. Обратны ли друг другу соответствия $y = x^2$ и $x = \sqrt{y}$, если X — множество действительных чисел, а Y — множество неотрицательных чисел? Обратны ли друг другу эти соответствия, если и X, и Y — множества неотрицательных чисел?

10. Композиция соответствий. В стране Швамбрании единственным средством передвижения служит самолет. Поэтому если турист x побывал в городе z, то найдется такой самолетный рейс y, что, во-первых, этот турист летел рейсом y, а во-вторых, самолеты этого рейса приземляются в городе z. Таким образом, соответствие «турист побывал в данном городе» получается из двух соответствий: «турист летел самолетом данного рейса» и «самолеты этого рейса приземляются в данном городе». Говорят, что оно является композицией этих двух соответствий.

В общем виде композиция двух соответствий определяется следующим образом. Пусть заданы три множества X, Y и Z и соответствия R между X и Y и S между Y и Z. Назовем *композицией* R и S соответствие Q между X и Z, такое, что xQz в том и только в том случае, когда есть хоть одно $y \in Y$, для которого xRy и ySz. В этом случае пишут: $Q = RS$. Это несколько громоздкое определение можно сделать более наглядным с помощью графов заданных соответствий. Пусть R и S заданы графами (рис. 29). Пара (x, z) принадлежит графику соответствия RS, если из точки x можно перейти в точку z, двигаясь по стрелкам заданных графов. Например, пара (x_1, z_3) принадлежит графику соответствия RS, потому что из x_1 можно сначала перейти в точку y_2, а потом из y_2 перейти в точку z_3. А пара (x_1, y_1) графику RS не принадлежит: из точки x_1 можно попасть лишь в точки y_2 и y_3, а из них ни одна стрелка не ведет в точку z_1.

Упражнения

72. По графам соответствий R и S (рис. 30) постройте граф соответствия RS. Найдите (RS) (a) и $(RS)^{-1}$ (z).

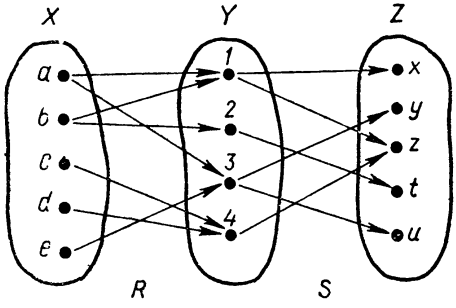


Рис. 30.

73. Пусть Z — множество треугольников, Y — множество окружностей и X — множество точек. Зададим соответствия xRy — «точка x является центром окружности y» и ySz — «окружность y вписана в треугольник z». Что значит соответствие $x(RS)z$?

74. Пусть X — множество чисел, Y—множество треугольников и Z—множество окружностей. Зададим соответствия xRy — «число x — площадь треугольника y» и ySz — «треугольник y описан около окружности z». Что значит соответствие RS? Известно, что из всех треугольников, описанных вокруг данной окружности, наименьшую площадь имеет правильный треугольник. Найдите $(RS)^{-1}(z)$, если z — окружность радиуса r.

75. Найдите график соответствия RS между множествами $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, если график соответствия R состоит из пар:

$$(x_1, y_2),\ (x_2, y_1),\ (x_3, y_1),\ (x_3, y_3),$$

а график соответствия S — из пар:

$$(y_1, z_1),\ (y_1, z_2),\ (y_2, z_1),\ (y_3, z_3),\ (y_4, z_1).$$

Найдите графики соответствий $S^{-1}R^{-1}$ и $(RS)^{-1}$. Докажите, что всегда $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.

ОТНОШЕНИЯ В МНОЖЕСТВАХ

1. Отношения, их графы и графики. В соответствии «число x больше числа y» и x, и y принадлежат одному и тому же множеству действительных чисел. А в соответствии «треугольник x конгруэнтен треугольнику y» и x, и y — треугольники. Соответствия, для которых области отправления и прибытия совпадают, играют особую роль во многих вопросах, и потому мы присвоим им особое название, а именно назовем *отношениями*. При этом, поскольку речь идет об элементах одного и того же множества X, будем говорить не об отношениях между X и X, а об отношениях в множестве X. Например, делимость — отношение в множестве натуральных чисел, конгруэнтность —в множестве геометрических фигур, параллельность и перпендикулярность — в множестве прямых и т. д.

Любопытно, что, хотя отношение является частным случаем соответствия, любое соответствие между X и Y можно рассматривать как отношение в объединении $X \cup Y$ этих множеств: достаточно взять декартов квадрат этого объединения и выбрать в нем пары

(x, y), принадлежащие графику данного соответствия. Но вряд ли целесообразно рассматривать множество, состоящее из прямых и окружностей или из треугольников и чисел: лучше считать их различными множествами и не сводить общее понятие соответствия к его частному случаю — отношению.

Рис. 31.

Поскольку понятие отношения — частный случай понятия соответствия, то все сказанное о соответствиях переносится на отношения. Так, можно говорить о пересечении и объединении отношений, о несовместных и противоположных отношениях и т. д. Например, отношение перпендикулярности в множестве прямых несовместно с отношением параллельности, а отношение «старше» в множестве людей несовместно с отношением «младше». Объединением отношений «больше» и «меньше» в множестве чисел является отношение неравенства, а пересечением отношений «делится» и «является делителем» в множестве натуральных чисел является отношение «равно» (если натуральное число x делится на натуральное число y и в то же время является его делителем, то эти числа равны).

Рис. 32.

Но некоторые особенности, выделяющие рассматриваемый частный случай, все же имеются. Во-первых, отношение R^{-1}, обратное отношению R в множестве X, само является отношением в том же самом множестве (ведь в этом случае в записи xRy и x, и y принадлежат X). При этом $yR^{-1}x$ в том и только в том случае, когда xRy. Например, если X — множество натуральных чисел и R — отношение «делится на», то обратным ему будет отношение «является делителем», поскольку x делится на y в том и только в том случае, когда y является делителем x.

Точно так же, если R и S — отношения в X, то их композиция RS также является отношением в X. При этом и SR также отношение в X, причем следует иметь в виду, что, вообще говоря, RS и SR не совпадают. Например, если R — отношение «быть братом», а S — «быть женой», то RS — отношение «брат жены», а SR — «жена брата».

При изображении графами отношений в множестве X элементы этого множества изображают точками лишь один раз, а потом проводят стрелки из x в y, если xRy. При этом не исключается, что стрелка начинается и кончается в одной и той же точке (такие стрелки называют петлями, рис. 31).

Кроме того, может случиться, что стрелка идет и из x в y, и из y в x (и прямая x параллельна прямой y, и прямая y параллельна прямой x). В этом случае будем рисовать одну двойную стрелку (рис. 32).

Если некоторое отношение R в X задано графом, то для получения графа обратного отношения надо повернуть все стрелки в обратную сторону, а чтобы получить граф противоположного отно-

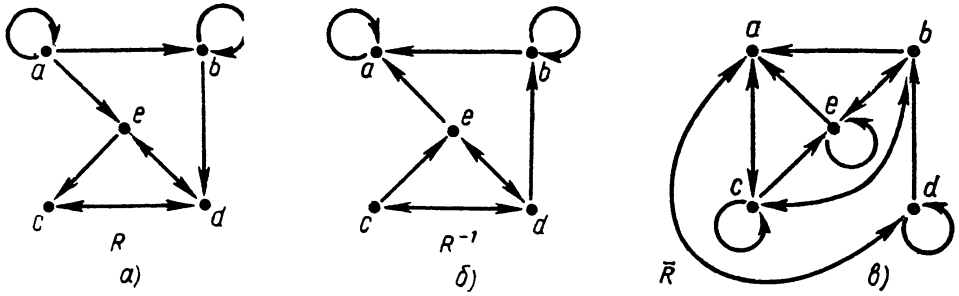


Рис. 33.

шения, надо стереть все имеющиеся стрелки и провести все стрелки, которых не было на рисунке (рис. 33).

Если отношение R в числовом множестве X задано равенством или неравенством, то противоположное ему отношение получается путем замены знака $=$ на $\neq$ и наоборот, замены $<$ на $\geqslant$, а $>$ на $\leqslant$ и наоборот. Например, для отношения $x + y = 4$ противоположным будет отношение $x + y \neq 4$, а для $x + y > 4$ — отношение $x + y \leqslant 4$.

Чтобы получить отношение, обратное отношению $F(x, y) = a$ или отношению $F(x, y) > a$, надо переставить местами x и y. Например, для отношения $x^2 + 3y^2 = 1$ обратным является $y^2 + 3x^2 = 1$, а для отношения $8x^3 + y^2 > 9$ обратно $8y^3 + x^2 > 9$.

Отметим, что в любом множестве X существует отношение тождества $x = y$, выполняющееся в том и только в том случае, когда x и y совпадают. Граф этого отношения состоит из всех петель, соответствующих элементам множества X. График этого отношения состоит из всех пар (x, x), $x \in X$. При изображении графика в виде таблицы с заштрихованными клетками надо штриховать диагональные клетки (табл. 3). В дальнейшем будем обозначать график отношения тождества через T.

Таблица 3

	a	b	c	d
a	▨			
b		▨		
c			▨	
d				▨

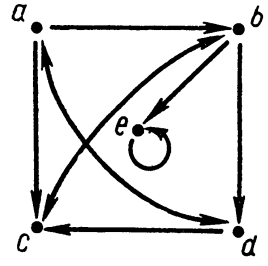


Рис. 34.

Если R — отношение между числами, то точечный график отношения R^{-1} получается из точечного графика отношения R, симметричного относительно прямой $y = x$.

Упражнения

76. На рисунке 34 изображен граф отношения R в множестве $X = \{a, b, c, d, e\}$. Запишите график этого отношения.

77. График отношения R в множестве $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ состоит из пар: (a, a), (a, c), (a, f), (b, a), (b, e), (d, a), (d, d), (d, f), (f, b), (f, c), (f, e), (e, f).

Начертите граф этого отношения.

78. На рисунке 35 изображен граф отношения «x — брат y» в множестве людей $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$. Определите по этому графу, кто является мужчиной, а кто женщиной. Для кого по этому графу нельзя сделать выводов?

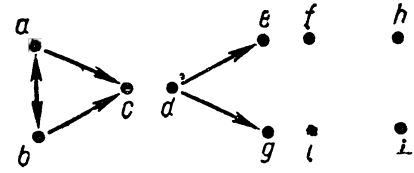


Рис. 35.

79. Граф на рисунке 36 задает в том же множестве X, что и в задаче 78, отношение «x — сестра y». При этом не все линии проведены. Дополните граф недостающими линиями и укажите, какого пола f, h, i.

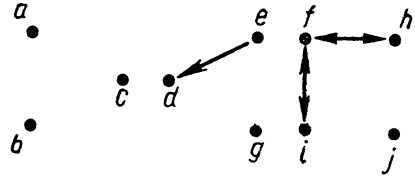


Рис. 36.

80. На рисунке 37 изображены два графа. Один из них — граф отношения «x — отец y», а другой — отношения «x — дед y». Определите, где граф первого, а где — второго отношения.

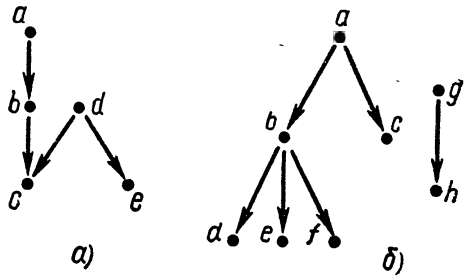


Рис. 37.

81. Назовите известные вам отношения в следующих множествах:

а) множество натуральных чисел;

б) множество треугольников;

в) множество окружностей;

г) множество государств;

д) множество людей;

е) множество алгебраических выражений;

ж) множество уравнений.

82. Найдите область определения и множество значений для отношения «быть отцом» в множестве людей. Сделайте то же самое для отношения «быть братом». Какое из этих отношений сюръективно? Какое из них инъективно?

83. Обозначим символическими знаками $О$, $М$, $Р$, $Б$, $С$, $Му$, $Ж$, $Сы$, $Д$ отношения «быть отцом», «быть матерью», «быть ребенком», «быть братом», «быть сестрой», «быть мужем», «быть женой», «быть сыном», «быть дочерью» в множестве людей.

а) Какие из следующих связей между этими отношениями истинны:

$$О \subset \overline{М},\quad Б^{-1} = С,\quad О \cup М = Р^{-1},\quad Ж \cdot О = М,$$
$$Б \cdot С \subset Б,\quad С \subset Р \cdot Р^{-1},\quad Р \cdot Р^{-1} = Р^{-1} \cdot Р,\quad О \subset \overline{Р},$$
$$Б \cdot Б \subset Б,\quad Б \subset \overline{С},\quad Б^{-1} = Б \cup С,\quad Б^{-1} = С^{-1},$$

$Му \cap Ж = \varnothing$, $О \cap М = \varnothing$, $Р = Сы \cup Д$, $Сы \cap Д = \varnothing$?

б) Существуют обозначения для иных родственных связей, например: «быть дедушкой», «быть бабушкой», «быть внуком», «быть внучкой», «быть дядей», «быть тетей», «быть племянником», «быть племянницей», «быть двоюродным братом», «быть двоюродной сестрой», «быть зятем» (мужем дочери), «быть снохой» (женой сына), «быть тестем» (отцом жены), «быть тещей» (матерью жены), «быть свекром» (отцом мужа), «быть свекровью» (матерью мужа), «быть шурином» (братом жены), «быть деверем» (братом мужа), «быть золовкой» (сестрой мужа), «быть невесткой» (женой брата). Выразите эти отношения через указанные выше девять отношений.

в) Как называются следующие отношения:

$$Му^{-1},\ Му \cup Ж,\ О \cup М,\ О \cdot М,\ О \cdot О,\ М \cdot О,$$

$$Б \cdot О,\ Б \cdot М,\ М \cdot Б,\ М \cdot М,\ М \cdot Р^{-1},\ С \cdot Р^{-1},\ Б \cdot Р^{-1}?$$

84. Какие из указанных ниже отношений xRy функциональны?

а) $2x + 3y = 12$, $x, y \in \boldsymbol{R}$;
б) $x^2 = y^2$, $x, y \in \boldsymbol{R}$;
в) $|x| = |y + 2|$, $x, y \in \boldsymbol{R}$;
г) $x + y = y^2$, $x, y \in \boldsymbol{R}$;
д) x есть мать y;
е) x есть дочь y.

85. Для функции, выраженной формулой $y = x^2 + 1$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, найдите область задания и множество значений.

86. Какие из функций упражнения 84 задают биективное отображение?

87. Найдите образ числа 3 для следующих отношений в множестве действительных чисел:

а) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;
б) $y \geqslant x^2 + 1$.

88. а) Сделайте грамматический разбор предложения:

«После битвы на Курской дуге советские войска начали наступление на Орел и Белгород».

Результат разбора изобразите графом, содержащим только номера слов и указание типа отношения (предлоги и союзы опускаются).

б) Укажите все возможности грамматического разбора предложения:

«Раскапывайте погребенных в земле слепых исполинов» и изобразите каждую возможность графом.

89. На рисунке 38 изображен граф отношения R. Постройте графы следующих отношений: R^{-1}, R^2, RR^{-1}, $R^{-1}R$, $\overline{R}$, $R\overline{R}$.

90. В множестве X заданы два отношения R и S, графы которых изображены на рисунке 39. Постройте графы следующих отношений в X: $R^{-1}S^{-1}$, RS, $R^{-1}S$, RS^{-1}, $R\overline{S}$, $\overline{S}R$. Укажите графики этих отношений.

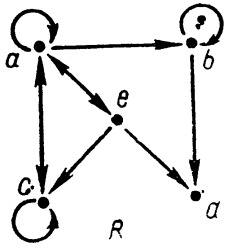
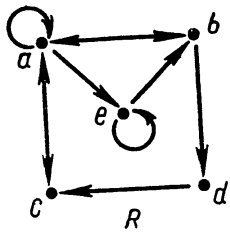


Рис. 38.



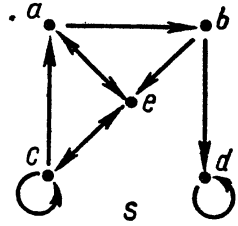


Рис. 39.

91. Докажите следующие формулы для отношений параллельности и перпендикулярности в множестве прямых на плоскости:

а) $\|^{-1} = \|$; в) $\| \cdot \| = \|$; д) $\| \cdot \perp = \perp$;

б) $\perp^{-1} = \perp$; г) $\perp \cdot \perp = \|$; е) $\perp \cdot \| = \perp$.

92. Дано множество $X = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$. Укажите графики следующих отношений в X:

а) x меньше y;

б) x делится на y;

в) x вдвое больше, чем y;

г) x на 2 больше, чем y.

93. Множество X членов семьи Смирновых состоит из отца Ивана Михайловича, матери Елены Андреевны и четырех детей: Миши, Тани, Васи и Оли (дети указаны по старшинству).

а) Назовите все пары элементов множества X, между которыми существует отношение «быть дочерью», и постройте граф этого отношения.

б) Постройте граф отношения «быть старше», если известно, что Иван Михайлович старше Елены Андреевны.

в) Постройте граф отношения «быть матерью». Обратно ли это отношение для отношения «быть ребенком»?

г) Обратно ли отношение «быть дочерью» для отношения «быть родителем»?

д) Какое отношение обратно для отношения «быть родителем»? Постройте графы отношения «быть родителем» и обратного ему отношения.

94. В множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ задано отношение R «делится на». Найдите R^{-1} ($\{2, 3, 4\}$).

95. Какое отношение в множестве чисел обратно отношению «меньше»? А какое отношение противоположно отношению «меньше»?

96. Постройте точечный график отношения $y = x + 2$ для множества $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

97. Изобразите на координатной плоскости множество точек $A(m, n)$ с целыми координатами, такими, что:

а) $0 \leqslant m \leqslant 9$, $-3 \leqslant n \leqslant 3$;

б) $m = 2$, $-5 < n < 4$;

в) $m = 2n$, $-4 \leqslant m \leqslant 4$;

г) $0 \leqslant m \leqslant n$, $0 \leqslant n \leqslant 6$;
д) $m + n = 4$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
е) $m + n < 5$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$.

98. Изобразите на координатной плоскости множество точек $M(x, y)$, таких, что:

а) $x = 2y$, $-5 \leqslant x \leqslant 5$;
б) $x + y = 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
в) $x + y \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
г) $y = 2x$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$;
д) $x - y \leqslant 6$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
е) $x = 2$, $-4 \leqslant y \leqslant 3$;
ж) $y = 3$, $-2 \leqslant x \leqslant 5$;
з) $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-2 \leqslant y \leqslant 4$.

99. В множестве действительных чисел задано отношение $y \geqslant x^2$. Какое отношение обратно ему? Какое отношение противоположно ему?

100. Найдите область задания и множество значений для отношения $x + y = 8$, если x и y — натуральные числа.

101. Изобразите точечный график отношения $y = 3x$ для множества $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

102. Пусть X и Y — множества, указанные в задаче 5, и R — соответствие «в слово x входит буква y». Составьте графики отношений RR^{-1} в X и $R^{-1}R$ в Y. Постройте графы этих отношений. Найдите RR^{-1} (папа) и $R^{-1}R$ (ф).

103. Постройте график пересечения отношений R: $y \geqslant x^2$ и S: $x^2 + y^2 \leqslant 25$ в множестве действительных чисел. Постройте график объединения тех же отношений. Постройте графики отношений $(R \cap S)^{-1}$ и $(R \cup S)^{-1}$.

104. Чем отличаются друг от друга графики отношений

$$y \geqslant x^2 + 4x + 4 \quad \text{и} \quad y > x^2 + 4x + 4?$$

105. Найдите графики следующих отношений:

а) $y \geqslant 4x - 8$;
б) $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 36$;
в) $y \leqslant x^2 - 4x + 3$;
г) $|y| > |x + 1|$;
д) $y \geqslant 2x^2$;
е) $\sqrt{y^2 - 4x^2y + 4x^4} = 1$.

106. Найдите пересечение графиков отношений:

а) $x + y = 9$ и $xy = 14$;
б) $x^2 + y^2 = 169$ и $x^2 - y^2 = 119$;
в) $x^2 + y^2 = 29$ и $xy = 10$.

107. Какие из следующих пар чисел: (1, —7), (5, 5), (13, 11), (—8, —6), (17, 1), (—7, 1):

а) принадлежат графику отношения $x^2 + y^2 = 50$;
б) принадлежат графику отношения $x^2 - y^2 = 48$;
в) принадлежат графику пересечения этих отношений?

108. Равны ли $R \cap S$ и $Q \cap S$, если

R: $x^2 + y^2 = 25$, S: $x + y = 7$, Q: $xy = 12$?

109. Постройте графики пересечений следующих отношений:

а) $x^2 + y < 9$ и $y \leqslant x^2$;

б) $x^2 + y^2 \leqslant 25$ и $x + y \geqslant -1$;

в) $x^2 + y^2 \leqslant 25$ и $y > x^2$;

г) $y \geqslant \frac{1}{2}x^2$ и $y \geqslant \frac{3}{2}x - 1$;

д) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 26$ и $2x + y = 1$;

е) $x^2 + y^2 \leqslant 25$ и $y = \frac{4}{9}x^2$.

110. Для тех же отношений найдите графики их объединений.

111. Для следующих отношений запишите обратное, противоположное и обратное противоположному:

а) $x^2 + 6y^2 > 1$;

б) $x^2 + 8x + 4y^2 + 1 \geqslant 6$;

в) $x^4 + 16y^4 \geqslant 81$;

г) $\frac{3x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} \geqslant 0$.

2. Свойства отношений. Говоря о некотором отношении R в множестве X, можно брать любые пары элементов (x, y) из этого множества и смотреть, верно для них xRy или ложно. В частности, можно брать пары (x, x), состоящие из одинаковых элементов, т. е. «диагональ» T декартова квадрата $X \times X$. Может случиться, что для всех таких пар истинно xRx. Например, если R — отношение конгруэнтности в множестве геометрических фигур, то всегда xRx, так как любая фигура сама себе конгруэнтна. Точно так же отношение «учиться в одном классе» в множестве учеников таково, что xRx для всех x — любой ученик учится в одном классе сам с собой. Отметим, что если заменить множество учеников более широким множеством всех людей, то это свойство перестает выполняться — если какой-нибудь человек не учится, то нельзя сказать, что он учится в одном классе с самим собой.

Назовем указанное выше свойство отношений *рефлексивностью* (от латинского слова reflectio — отражение, в записи xRx элемент x как бы отражается в букве R). Таким образом, отношение R в множестве X называется *рефлексивным*, если для всех $x \in X$ имеем: xRx. Более формально свойство рефлексивности можно записать так: $T \subset R$ (отношение является следствием отношения тождества)[1].

Многие отношения, изучаемые в школьной математике, обладают свойством рефлексивности. Например, отношение параллельности в множестве прямых рефлексивно, так как любая прямая считается параллельной самой себе, $x \parallel x$. Рефлексивны и отношение подобия в множестве геометрических фигур, и отношение рав-

---

[1] Ради простоты мы обозначаем отношение тождества в X той же буквой T, что и его график.

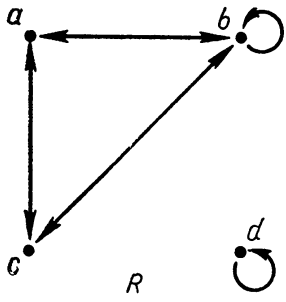


Рис. 40.

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

R

Рис. 41.

носильности в множестве уравнений, и отношение «быть ребенком тех же родителей» в множестве людей и т. д.

Отношение перпендикулярности в множестве прямых линий не является рефлексивным. Более того, ни одна прямая не перпендикулярна самой себе, т. е. отношения перпендикулярности и тождества несовместны друг с другом. Назовем такие отношения антирефлексивными. Иными словами, отношение R в X называется *антирефлексивным*, если оно несовместно с отношением тождества, $R \cap T = \varnothing$, или, что то же самое, если из него следует отношение различия (например, для прямых линий из того, что $x \perp y$ следует, что $x \neq y$). Антирефлексивны и отношения «больше» и «меньше» в множестве чисел, «выше» и «ниже», «легче» и «тяжелее», «старше» и «моложе» в множестве людей и т. д. Отношение «учиться в одном классе» не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным.

Из того, что xRy, не следует, вообще говоря, что и yRx. Например, из того, что человек x знает о существовании человека y, не следует, что и y знает о существовании x (вряд ли Анатолий Карпов знает всех поклонников своего шахматного таланта). Но бывают отношения, в которые x и y входят симметрично, т. е. так, что из xRy всегда вытекает yRx. Например, отношение «знакомы» в множестве людей обладает этим свойством: если x знаком с y, то и y знаком с x. Чтобы подчеркнуть эту симметричность, обычно употребляют слово «взаимно»: люди x и y взаимно знакомы.

Свойство отношения R, заключающееся в том, что из xRy следует yRx, называют *симметричностью* этого отношения. Формально можно сказать, что отношение R симметрично тогда и только тогда, когда оно совпадает с обратным ему отношением: $R = R^{-1}$. В самом деле, вместо yRx можно написать $xR^{-1}y$, и тогда из xRy следует $xR^{-1}y$, а из $xR^{-1}y$ следует xRy, и потому $R = R^{-1}$. Примерами симметричных отношений могут служить параллельность в множестве прямых, касание в множестве окружностей, конгруэнтность в множестве геометрических фигур, равенство остатков при делении на 7 в множестве натуральных чисел и т. д. Если отношение R симметрично, то его граф состоит из двойных стрелок и некоторых (не обязательно всех) петель (рис. 40). А при задании такого отношения таблицей множество заштрихованных клеток симметрично относительно диагонали T (рис. 41). При задании симметричного отношения точечным графиком получается множество, симметричное относительно прямой $y = x$.

Разумеется, не всякое отношение обладает свойством симметричности. Например, ни отношение «выше», ни отношение «тяжелее» этоим свойством не обладают. Более того, графики этих отношений не пересекаются с графиками обратных им отношений (не может быть, что одновременно и x выше, чем y, и y выше, чем x). Если графики отношений R и R^{-1} не пересекаются (т. е. если ни для каких x и y не выполняются одновременно xRy и yRx), то R называют *асимметричным* отношением (разумеется, в этом случае и отношение R^{-1} асимметрично). Объединение асимметричного отношения с отношением тождества называют *антисимметричным* отношением. Иными словами, отношение R называют антисимметричным, если оно рефлексивно и из xRy и yRx следует, что $x = y$. Примерами антисимметричных отношений могут служить «не больше», «не меньше», «не выше» и т. д.

Отношение конгруэнтности фигур обладает еще одним важным свойством: если фигура x конгруэнтна фигуре y, а фигура y — фигуре z, то x конгруэнтна z. Такое свойство отношений называют транзитивностью. Вообще, отношение R в множестве X называется *транзитивным*, если из xRy и yRz вытекает xRz. Используя понятие композиции отношений, это условие можно записать так: $R \cdot R \subset R$. В самом деле, $x(R \cdot R)z$ означает, что найдется элемент y, такой, что xRy и yRz. По транзитивности отсюда следует, что xRz. А это и значит, что из $x(R \cdot R)z$ следует xRz, т. е. что $R \cdot R \subset R$.

Кроме отношения конгруэнтности, свойством транзитивности обладают отношения параллельности прямых (если прямая x параллельна прямой y, а прямая y — прямой z, то x параллельна z), делимости (если x делится на y, а y делится на z, то x делится на z) и т. д. Отношение перпендикулярности прямых нетранзитивно: из того, что $x \perp y$ и $y \perp z$, не только не следует, что $x \perp z$, но, более того, можно наверняка сказать, что прямые x и z не являются перпендикулярными. Иными словами, для этого отношения пересечение R^2 и R пусто: $R^2 \cap R = \varnothing$. Такие отношения называют *антитранзитивными*.

Если отношение R транзитивно и в его графе идут стрелки от x к y и от y к z, то должна быть и стрелка, идущая от x к z. Такое обилие стрелок затрудняет изображение графа. Поэтому для транзитивных отношений изображают лишь часть стрелок и словесно указывают, что отношение R транзитивно. Так, на рисунке 42 часть стрелок опущена.

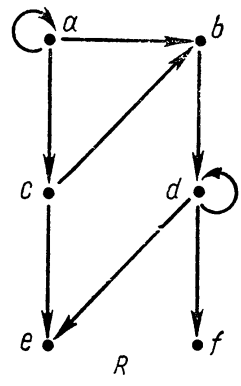


Рис. 42.

Для любых двух различных чисел x и y выполняется либо отношение $x < y$, либо отношение $y < x$. Но отношение $y < x$ обратно отношению $x < y$. Это значит, что все декартово произведение $X \times X$ является объединением трех подмножеств: диагонали, графика отноше-

ния R и графика обратного ему отношения R^{-1}. Назовем отношения, обладающие этим свойством, связанными. Итак, отношение R в множестве X называется *связанным*, если декартово произведение $X \times X$ является объединением трех подмножеств: $T = \{(x, x), x \in X\}$, графика отношения R и графика обратного ему отношения R^{-1}. Отношение «делится на» в множестве натуральных чисел не является связанным, так как существуют такие различные натуральные числа x и y, что ни x не делится на y, ни y не делится на x. В множестве же $X = \{2^n, n \in N\}$ отношение «делится на» связанное, так как для любых m и n или 2^m делится на 2^n, или 2^n делится на 2^m.

Упражнения

112. В множестве $X = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «быть делителем». Постройте граф этого отношения и укажите, какими из указанных выше свойств (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, асимметричность, антисимметричность, транзитивность, антитранзитивность, связанность) обладает это отношение.

113. Для каждого из следующих отношений определите, какими из указанных выше свойств оно обладает:

а) конгруэнтность (в множестве геометрических фигур);
б) подобие (в том же множестве);
в) параллельность (в множестве прямых линий на плоскости);
г) перпендикулярность (в том же множестве);
д) концентричность (в множестве окружностей на плоскости);
е) касание (в том же множестве);
ж) пересечение (в том же множестве);
з) быть меньше (в множестве действительных чисел);
и) быть не больше, чем (в множестве целых чисел);
к) делиться на (в множестве натуральных чисел);
л) противоположность (в множестве действительных чисел);
м) жить в одном доме (в множестве людей);
н) жить на одной улице (в том же множестве);
о) быть похожим (в том же множестве);
п) быть отцом (в том же множестве);
р) быть супругом (в том же множестве);
с) быть братом (в том же множестве);
т) весить на 3 кг больше (в множестве рыб);
у) весить больше (в том же множестве);
ф) родиться позже (в множестве людей);
х) быть взаимно простыми (в множестве натуральных чисел);
ц) иметь непустое пересечение (в множестве непустых геометрических фигур);
ч) происходить одновременно (в множестве физических явлений).

114. Какие из следующих отношений между людьми являются рефлексивными, какие — симметричными и какие — транзитивными:

а) быть сестрой;

б) быть начальником;
в) быть другом;
г) быть отцом;
д) иметь одинаковый цвет глаз (оттенки цветов не учитываются)?

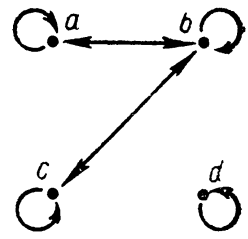


Рис. 43.

115. На рисунке 43 показан граф отношения R. Укажите свойства этого отношения.

116. График отношения R в множестве $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ состоит из следующих пар:

(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (b, b), (d, f), (f, d), (c, c), (d, d), (f, f).

Какими свойствами обладает это отношение? Какие пары надо добавить, чтобы получилось рефлексивное отношение?

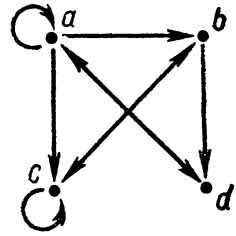


Рис. 44.

117. График отношения R в множестве $X = \{a, b, c, d, e\}$ состоит из следующих пар: (a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (c, e). Какие пары надо добавить, чтобы получился график симметричного отношения? Какие пары надо добавить, чтобы получился график транзитивного отношения?

118. На рисунке 44 изображен граф отношения R. Какие линии надо добавить, чтобы получился граф рефлексивного отношения? Что надо сделать, чтобы получился граф симметричного отношения? Что надо сделать, чтобы получился граф транзитивного отношения?

119. Докажите, что объединение отношения R с обратным ему отношением R^{-1} является симметричным отношением.

120. Докажите, что пересечение отношения R и обратного ему отношения R^{-1} — симметричное отношение.

121. Докажите, что пересечение отношения R с отношением $\overline{R^{-1}}$, которое противоположно отношению R^{-1}, асимметрично.

122. Докажите, что пересечение асимметричного отношения с отношением тождества пусто.

123. Докажите, что любое отношение в множестве X является объединением симметричного и асимметричного отношений.

124. Докажите, что пересечение симметричного и асимметричного отношений пусто.

125. Верно ли, что любое отношение либо симметрично, либо антисимметрично? Приведите примеры.

126. Дайте несколько примеров антитранзитивных отношений. Является ли каждое отношение либо транзитивным, либо антитранзитивным?

3. Отношения эквивалентности. При поломке какой-нибудь детали автомобиля ее заменяют другим экземпляром той же детали. Различные экземпляры одной и той же детали неотличимы друг от друга; они, как говорят, эквивалентны (равноценны). Точно так же

эквивалентны все монеты одного и того же достоинства и года выпуска, все костюмы одной и той же модели и размера, сделанные из одинакового материала, и т. д.

Не всегда эквивалентность сводится к простой одинаковости. Например, если требуется уплатить сумму в 1 руб., то бумажный и металлический рубли эквивалентны друг другу, равно как и 5 двадцатикопеечных монет, или 20 пятачков. В физике считаются эквивалентными взаимозаменяющие друг друга количества энергии (например, 1 ккал эквивалентна 4190 Дж и т.д.).

Выясним, какими общими свойствами обладает отношение взаимозаменяемости объектов. Во-первых, ясно, что каждый объект может сам себя заменить. Это значит, что для всех x должно выполняться отношение xRx, т. е. отношение взаимозаменяемости должно быть рефлексивным. Во-вторых, если x взаимозаменяемо с y, то и y взаимозаменяемо с x. Иными словами, если xRy, то и yRx, а потому R симметрично. Наконец, если x взаимозаменяемо с y, а y взаимозаменяемо с z, то x взаимозаменяемо с z. Иными словами, из xRy и yRz следует xRz, т. е. R транзитивно.

Итак, отношение взаимозаменяемости должно обладать свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Эти свойства характеризуют взаимозаменяемость, и потому мы вводим следующее определение:

Отношением эквивалентности в множестве X называется любое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R.

Приведем примеры таких отношений.

а) Отношение конгруэнтности геометрических фигур рефлексивно (каждая фигура сама себе конгруэнтна), симметрично (если фигура x конгруэнтна фигуре y, то и фигура y конгруэнтна фигуре x) и транзитивно (если фигура x конгруэнтна фигуре y, а фигура y — фигуре z, то x и z конгруэнтны). Значит, отношение конгруэнтности — эквивалентность в множестве геометрических фигур.

б) Отношение подобия геометрических фигур также является отношением эквивалентности.

в) Отношение параллельности прямых также обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, а потому является отношением эквивалентности в множестве прямых.

г) Отношение равносильности двух уравнений рефлексивно (каждое уравнение равносильно самому себе), симметрично (если одно уравнение равносильно другому, то и второе равносильно первому) и транзитивно. Значит, оно является эквивалентностью в множестве уравнений.

д) Отношение равенства дробей тоже является эквивалентностью. В самом деле, дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны в том и только в том случае, когда $ad = bc$. Легко проверяется, что $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ (наше ра-

венство принимает вид: $ab = ab$) и что из $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следует $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ (из $ad = bc$ следует $cb = da$). Докажем транзитивность этого отношения. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$. Это значит, что $ad = bc$ и $cf = de$. Но тогда $adf = bcf$ и $bcf = bde$, а потому $adf = bde$. Отсюда получаем, что $af = be$, а это и значит $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.

Отношение «жить в одном доме» является эквивалентностью в множестве людей (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно), а отношение «жить на одной улице» эквивалентностью не является. Дело в том, что человек y может жить в угловом доме на пересечении двух улиц, а x и z — на этих улицах. Тогда x и y живут на одной улице, равно как y и z, но x и z живут на разных улицах. Не является эквивалентностью и отношение «служить в одном полку» в множестве военнослужащих. Оно симметрично и транзитивно, но не рефлексивно — есть военнослужащие, не принадлежащие никакому полку (например, моряки), и о них нельзя сказать, что они служат в одном полку сами с собой.

Упражнения

127. Какие из отношений в упражнении 113 являются отношениями эквивалентности?

128. Является ли отношением эквивалентности «иметь одинаковые остатки при делении на 7»?

129. Какие отношения эквивалентности можно ввести в множество учеников вашего класса?

130. Является ли отношением эквивалентности в множестве учеников вашего класса «участвовать в одной спортивной секции»?

131. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности:

а) равноудаленность от Москвы (в множестве городов);

б) принадлежность одному роду (в множестве живых существ);

в) быть двоюродным братом или сестрой (в множестве людей);

г) иметь общую границу (в множестве государств)?

4. Классы эквивалентности. Множество всех учащихся данной школы разбито на классы $1А$, $1Б$, ..., $10Б$. С этим разбиением связано отношение «учиться в одном классе», являющееся эквивалентностью. Вообще, пусть множество разбито на непересекающиеся подмножества, т. е. представлено в виде объединения подмножеств X_α, X_β, ..., никакие два из которых не пересекаются: $X = \bigcup\limits_\alpha X_\alpha$, причем $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$, если $\alpha \neq \beta$. Введем в X отношение R: «x принадлежит тому же подмножеству разбиения, что и y». Оно является эквивалентностью. В самом деле, R рефлексивно, так как каждый элемент x лежит в одном из подмножеств разбиения, а значит, лежит в одном подмножестве сам с собою; оно симметрично, так как если x лежит в том же подмножестве разбиения,

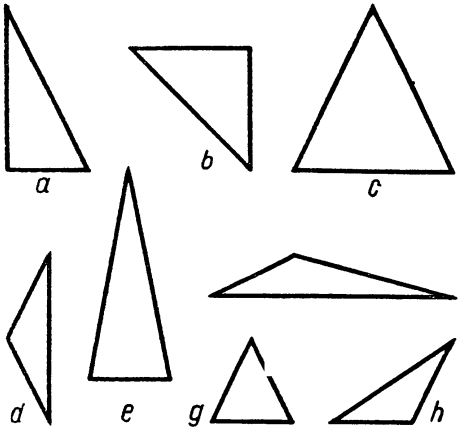


Рис. 45.

что и y, то и y лежит в одном подмножестве с x; наконец, это отношение транзитивно, так как если x лежит в одном подмножестве с y, а y — в одном подмножестве с z, то x и z принадлежат одному и тому же подмножеству (здесь использовано условие, что подмножества попарно не пересекаются, иначе могло бы случиться, что x и z находятся в разных подмножествах, а y принадлежит пересечению этих подмножеств).

Итак, с каждым разбиением множества на попарно непересекающиеся подмножества связано некоторое отношение эквивалентности. Замечательно, что и обратно, любое отношение эквивалентности может быть получено этим способом. В самом деле, пусть R — отношение эквивалентности в X. Докажем, что любые два множества $R(a)$ и $R(c)$ либо совпадают, либо не пересекаются (напомним, что через $R(a)$ обозначают образ элемента a при отношении R, т. е. множество всех элементов y, таких, что aRy). Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что если пересечение $R(a)$ и $R(c)$ непусто, то $R(a) = R(c)$. Предположим, что $b \in R(a) \cap \cap R(c)$. Так как $b \in R(c)$, то cRb, а тогда в силу симметричности R получаем bRc. Но тогда в силу транзитивности R из aRb и bRc следует aRc. Возьмем теперь любой элемент $z \in R(c)$. Тогда имеем: cRz, и из aRc и cRz получаем, что aRz, т. е. $z \in R(a)$. Значит, каждый элемент из $R(c)$ принадлежит $R(a)$, и потому $R(c) \subset R(a)$. Точно так же доказывается, что $R(a) \subset R(c)$, а значит, $R(a) = R(c)$.

Итак, различные подмножества $R(a)$ не пересекаются друг с другом. При этом в силу рефлексивности R имеем: $a \in R(a)$, и потому объединение всех $R(a)$, $a \in X$, совпадает с X. Мы получили разбиение X на попарно непересекающиеся подмножества.

Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества лежит в основе всех классификаций. Например, в библиотеках множество всех книг разбивают на книги по математике, по физике, по химии, по истории и т. д., в биологии множество всех живых существ разбивают на виды, множество видов — на роды и т. д.

Упражнения

132. На рисунке 45 изображены треугольники. Разбейте их на классы эквивалентности:

а) по свойствам углов;

б) по свойствам сторон.

133. Можно ли разбить множество треугольников на такие классы: разносторонние, равнобедренные и равносторонние?

134. Можно ли разбить множество целых чисел на подмножества положительных и отрицательных чисел?

135. На плоскости проведена прямая l. Можно ли сказать, что множество всех прямых на этой плоскости разбивается на три класса: параллельные данной прямой, перпендикулярные ей и пересекающиеся с этой прямой?

136. На какие классы разбивается множество натуральных чисел отношением «иметь одинаковые остатки при делении на 7»?

137. На какие множества разбивается множество учащихся отношением «учиться в одной школе»?

138. Можно ли классифицировать учащихся на отличников, пионеров и мальчиков?

139. На плоскости проведена окружность. Можно ли разбить множество всех окружностей на этой плоскости на два класса: касающихся этой окружности и пересекающихся с ней в двух точках? Какой класс окружностей надо еще добавить?

140. На какие классы разбивается множество русских слов?

141. На какие классы разбивается множество слов предложения?

142. На какие классы разбивается множество водоемов?

143. Пусть отношение R рефлексивно и транзитивно. Докажите, что пересечение $R \cap R^{-1}$ — отношение эквивалентности. Является ли эквивалентностью $R \cup R^{-1}$?

144. Является ли отношением эквивалентности равносильность уравнений?

145. Отношение параллельности рефлексивно, симметрично и транзитивно. На какие классы разбивается множество прямых линий на плоскости этим отношением? Дайте определение направления на плоскости.

146. Отношение концентричности окружностей рефлексивно, симметрично и транзитивно. На какие классы разбивается множество окружностей на плоскости этим отношением? Установите биективное соответствие между множеством точек плоскости и множеством классов эквивалентности.

147. Назовем два существительных взаимозаменяемыми, если в любом предложении, где встречается одно из этих существительных, можно заменить его другим существительным, стоящим в той же грамматической форме, и предложение не утратит грамматической правильности. Например, слова «интеграл» и «утюг» взаимозаменяемы: заменяя в предложении «интеграл суммы равен сумме интегралов» слово «интеграл» на «утюг», получаем грамматически правильное предложение «утюг суммы равен сумме утюгов». Точно так же, заменяя в предложении «утюг стоял на столе» слово «утюг» на «интеграл», получаем грамматически правильное предложение «интеграл стоял на столе». А слова «утюг» и «сумма» не являются взаимозаменяемыми — нельзя сказать «сумма стоял на столе».

Докажите, что отношение взаимозаменяемости слов рефлексивно, симметрично и транзитивно. Разбейте на классы эквивалентности множество слов:

{дядя, няня, маэстро, мышь, животное, день, пальто, поле}.

5. Отношения порядка. Слово «порядок» часто применяют в самых различных вопросах. Офицер дает команду: «По порядку номеров рассчитайся», арифметические действия выполняются в определенном порядке, спортсмены становятся по росту, все ведущие шахматисты располагаются в определенном порядке по так называемым коэффициентам Эло (американский профессор, который разработал систему коэффициентов, позволяющую учитывать все успехи и неудачи игроков), после первенства СССР все футбольные команды располагаются в определенном порядке и т. д. Существует порядок выполнения операций при изготовлении детали, порядок слов в предложении (попробуйте понять, что значит предложение «на он старика посадил осла не»!).

Что же общего во всех случаях, когда говорится о порядке? Иногда думают, что порядок жестко определяет расположение элементов и они идут друг за другом так, как солдаты в колонне по одному или как натуральные числа. Но если надо вычислить выражение $(25 - 16) : 3 + (31 + 1) \cdot 4$, то можно начать и с вычитания $25 - 16$, и со сложения $31 + 1$. А сделав эти операции, можно по своему усмотрению либо разделить 9 на 3, либо умножить 32 на 4. Но сначала умножить 1 на 4, а потом прибавить произведение к 31 нельзя.

Таким образом, правила арифметики говорят лишь, что порядок вычислений можно представить схемой, показанной на рисунке 46. Если ввести в множество операций отношение «предшествует», то увидим, что вычитание в нашем примере предшествует делению, сложение — умножению, а деление и умножение — второму сложению. При этом отношение «предшествует» в множестве арифметических операций удовлетворяет двум основным условиям: оно транзитивно (если операция x предшествует операции y, а операция y — операции z, то операция x предшествует z) и асимметрично (не существует таких операций, что x предшествует y, а y предшествует z).

Отношения предшествования с такими двумя свойствами встречаются очень часто — при разработке технологической карты обработки детали, при составлении плана создания нового технического устройства и т. д. Поэтому введем следующее определение: отношение R в множестве X называется *отношением строгого порядка*, если оно транзитивно и асимметрично. Легко проверить, что такие отношения, как «выше», «тяжелее», «дальше» и т. д., являются отношениями строгого порядка.

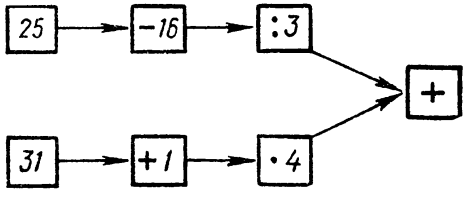


Рис. 46

Легко проверить, что любое отношение строгого порядка антирефлексивно. Ведь xRx противоречило бы асимметричности R. Кроме того, отметим, что отношение R^{-1}, обратное отношению строгого порядка, тоже является отношением того же типа. Например, отношению строгого порядка «меньше» в множестве действительных чисел обратно отношение «больше».

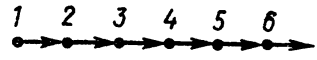


Рис. 47

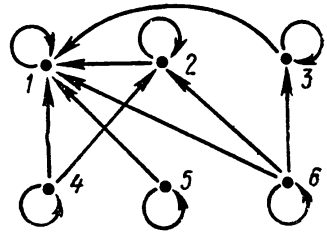


Рис. 48

Множество, в котором определено отношение строгого порядка, называют *упорядоченным*. Например, множество натуральных чисел упорядочено отношением «меньше». Но это же множество упорядочено и другим отношением—«делится на и больше». Между этими отношениями порядка есть существенная разница. Если взять два различных натуральных числа m и n, то окажется, что или $m < n$, или $n < m$. Иными словами, отношение «меньше» в множестве натуральных чисел связанное. Связанное оно и в множестве действительных чисел. Граф отношения «меньше» в множестве натуральных чисел можно изобразить в виде луча (рис. 47). А отношение «делится на» не является связанным; например, ни 12 не делится на 7, ни 7 не делится на 12. Граф этого отношения можно изобразить лишь на плоскости (рис. 48). Связанные отношения порядка будем называть *линейными*.

Отношению «меньше» в множестве действительных чисел противоположно отношение «не меньше». Оно уже не является отношением строгого порядка, так как не асимметрично. Дело в том, что при $x = y$ выполняются и отношение $x \geqslant y$, и отношение $y \geqslant x$. Иными словами, отношение «не меньше» является объединением отношения строгого порядка «больше» и отношения тождества. Такие объединения называют отношениями **нестрогого порядка**. Иначе можно сказать, что отношение R в X является отношением нестрогого порядка, если оно транзитивно и антисимметрично. Всякое отношение нестрогого порядка рефлексивно.

Отношение «не длиннее» в множестве отрезков транзитивно и, как легко видеть, рефлексивно. Но оно не является отношением нестрогого порядка, так как нарушено условие антисимметричности: из того, что отрезок x не длиннее отрезка y, а отрезок y — отрезка x, еще не следует совпадение этих отрезков (они могут быть различными, но иметь одну и ту же длину). Рефлексивные и транзитивные отношения называют отношениями *квазипорядка*.

Если R — отношение квазипорядка, то $R \cap R^{-1}$ — отношение эквивалентности. Обозначим через Y множество классов эквивалентности. Можно показать, что R определяет отношение нестрогого порядка в Y. В разобранном выше примере Y состоит из классов отрезков, имеющих одну и ту же длину.

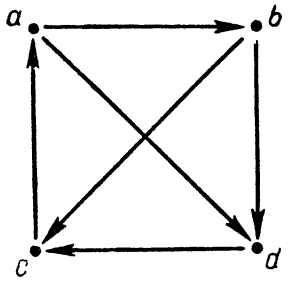


Рис. 49

Упражнения

148. На рисунке 49 изображен граф отношения «больше» в множестве чисел. Правильно ли он построен?

149. Является ли отношением порядка отношение «гора x не выше горы y»?

150. В предложении «Петр решил трудную и интересную задачу по математике» проведите стрелку от каждого слова к управляемому им слову (или словам). Дополните получившееся отношение до отношения строгого порядка.

151. В предложении

«В песчаных степях аравийской земли
Три гордые пальмы высоко росли»

проведите стрелку от каждого слова к согласованному с ним слову. Какое получилось при этом отношение: порядка или эквивалентности?

152. Какие из отношений в упражнении 113 являются отношениями строгого порядка, какие — нестрогого порядка, какие из них линейны, а какие нелинейны? Есть ли среди них отношения квазипорядка?

153. Является ли отношением порядка отношение «лежать внутри» для геометрических фигур?

154. Сколько различных осмысленных предложений можно составить, меняя порядок слов в предложении «Он не посадил старика на осла»?

6. Отношения сходства (толерантности). Две новые автомашины одной и той же марки, одного года выпуска и одинакового цвета полностью могут заменить друг друга. Но такие же две автомашины, имеющие разный цвет, лишь похожи друг на друга, и может случиться, что покупатель предпочтет купить одну из этих машин, а не другую. Еще меньше сходства между автомашинами одной и той же марки, но разных годов выпуска, а уж легковая машина и самосвал похожи лишь общим строением (обе машины имеют мотор, колеса, шасси, руль, тормоз и т. д.), но по общему виду совсем не похожи друг на друга.

Каждый предмет похож на себя, а если предмет x похож на предмет y, то и предмет y похож на x. Но вряд ли можно из того, что x похож на y и y похож на z, сделать безоговорочное заключение о сходстве x и z. Известны серии карикатур, в которых каждые два соседних рисунка почти неотличимы друг от друга, но в результате человеческое лицо превращается, например, в грушу. Таким образом, отношение сходства обладает лишь свойствами рефлексивности и симметричности, а транзитивным его считать нельзя.

Итак, введем следующее определение:

Определение. *Отношение R в множестве x называется отношением сходства, если оно рефлексивно и симметрично.*

В математике вместо «соотношение сходства» чаще говорят «отношение толерантности», но мы будем пользоваться более простым русским названием.

Приведем примеры отношений сходства.

1. Назовем два слова сходными, если они состоят из одинакового числа букв, причем либо совпадают, либо отличаются лишь одной буквой. Например, сходны слова «роза» и «коза», равно как и слова «коза» и «коса». Однако слова «роза» и «коса» не являются сходными, так как различаются в двух буквах. С помощью перехода от слова к сходному с ним слову можно «превратить муху в слона». Вот одна из цепочек:

Муха — мура — тура — тара — кара — каре — кафе — кафр — каюр — каюк — крюк — крок — срок — сток — стон — слон.

2. Отношение «быть другом» в множестве людей тоже является отношением сходства (если, конечно, считать, что каждый человек сам себе друг). Оно рефлексивно и симметрично, но не является транзитивным (не всякий друг моего друга дружит со мной).

3. Всякое измерение имеет определенную точность ε. Назовем две величины ε-сходными, если они отличаются друг от друга меньше, чем на ε. Измерение, выполненное с точностью до ε, не позволяет различить две ε-сходные величины. Но если x ε-сходно с y, а y ε-сходно с z, то x и z являются лишь 2ε-сходными. Поэтому отношение ε-сходства величин лишь рефлексивно и симметрично, но не является транзитивным.

4. Назовем две вершины многогранника сходными, если они принадлежат одному и тому же ребру (в частности, если они совпадают). Это тоже отношение сходства.

5. Сходством является и отношение касания в множестве окружностей (если считать каждую окружность касающейся себя).

6. Принадлежность двух русских слов одной и той же части речи кажется на первый взгляд отношением эквивалентности. Мы делим слова на существительные, прилагательные, глаголы, причастия, деепричастия, предлоги, союзы, наречия, числительные, частицы, междометия. Однако, например, слово «течь» можно рассматривать и как существительное (течь на корабле), и как глагол. Поэтому отношение «принадлежать одной и той же части речи» является лишь отношением сходства (слова «стол» и «течь» принадлежат одной и той же части речи, равно как слова «течь» и «идти», но слова «стол» и «идти» принадлежат разным частям речи).

Заметим, что множества различных частей речи почти не перекрываются друг с другом, а потому, исключив из языка совсем немного слов, можно было бы превратить отношение принадлежности одной части речи в отношение эквивалентности. Но в естественном языке это все же лишь отношение сходства.

Чтобы задать отношение сходства на данном множестве X,

достаточно выбрать в нем несколько непустых подмножеств A_1, ..., A_n, покрывающих все множество X (т. е. таких, что X является объединением этих множеств), и назвать элементы x и y из X сходными, если они принадлежат одному и тому же множеству. Это отношение, несомненно, рефлексивно и симметрично, но транзитивным оно будет лишь в случае, когда различные подмножества A_i и A_k не имеют общих элементов.

Упражнения

155. Какие из отношений упражнений 113 и 114 являются отношениями сходства, но не являются отношениями эквивалентности?

7. Бинарные отношения и лингвистика. Изложенная выше теория бинарных отношений может показаться на первый взгляд весьма абстрактной областью математики, далекой от каких-либо приложений. Разумеется, прикладная ценность теории бинарных отношений несравнима, например, с полезностью учения о функциях. Функциональные зависимости между величинами играют решающую роль в самых различных областях науки и техники — почти все физические законы формулируются на языке функций, поскольку в них говорится о том, как по заданному значению одной величины найти значение другой величины, а это можно сделать лишь в случае, когда между этими величинами есть функциональная зависимость. При этом над числовыми функциями можно выполнять арифметические операции, их можно дифференцировать, интегрировать и т. д.

Бинарные отношения между числами нельзя складывать или умножать, их нельзя дифференцировать или интегрировать, а по заданному бинарному отношению и значению одной величины нельзя найти другую величину — можно отыскать лишь целую совокупность значений второй величины. Поэтому в приложениях математики к физике или технике теория бинарных отношений не играет сколько-нибудь существенной роли (исключая, быть может, отношение неравенства, применяемое для оценок величин). Однако за последние десятилетия математические методы стали проникать в такие науки, как лингвистика, социология, психология, история, биология, где раньше они не находили применения. При этом наряду с количественными исследованиями (например изучением частоты, с которой те или иные слова встречаются в речи) математические методы стали применять в качественных, структурных исследованиях. Но структурные закономерности языка, психологии и т. д. нельзя выразить числами, в них речь идет об отношениях между элементами различных множеств (например, о согласовании слов, о взаимодействии ощущений и т. д.). Изложенная выше теория бинарных отношений и дает удобный математический аппарат для таких исследований. Мы разберем сейчас некоторые связи между теорией бинарных отношений и лингвистикой.

Между словами, входящими в некоторое предложение (если одно и то же слово входит несколько раз, то между вхождениями слов), существует ряд отношений.

1. Простейшим из таких отношений является отношение следования «слово x стоит в предложении левее, чем слово y». Этим задается линейный порядок в множестве вхождений слов в данное предложение. Для русского языка это отношение достаточно существенно (слова в предложении должны стоять в некотором порядке, иначе его невозможно будет понять), но еще важнее оно в таких языках, как английский. Дело в том, что в русском языке есть достаточно богатая система окончаний, показывающих связи слов в предложении, в английском же языке такой системы почти нет и связи слов определяются их порядком в предложении.

2. Второй важный тип отношений — грамматическое управление. Например, из грамматики известно, что предлог «к» требует дательного падежа, предлог «о» — предложного падежа и т. д. Таким образом, предлоги управляют падежами существительных. Обычно считают, что в русском языке управление идет от определяемого к определению, от сказуемого к подлежащему, от предлога к существительному, от глагола к прямому дополнению, от глагола к предлогу. Отношение управления позволяет делать грамматический разбор предложения.

Более общим, чем управление, является отношение руководства — многоэтапного управления (слово x руководит словом z, если есть такие слова $y_1, \ldots, y_n$, что x управляет y_1, y_1 управляет $y_2, \ldots, y_n$ управляет z).

3. Третьим типом отношений между вхождениями слов в предложения является согласование, т. е. наличие явно выраженных общих грамматических признаков, связывающих данную пару слов в коллектив. Например, прилагательное и существительное согласуются по роду, числу и падежу.

4. Четвертым типом является отношение однородности — «быть однородными членами предложения». Типичным примером может служить: «Швед, русский — колет, рубит, режет» (П у ш к и н А. С. Полтава). В этом предложении два однородных подлежащих и три однородных сказуемых.

5. Пятый тип отношений связан с делением предложений на коллективы слов, такие, что более мелкие коллективы входят в более крупные. Например, в предложении «Высокий деревянный дом стоял в густом зеленом лесу» выделяются коллективы слов «высокий деревянный дом» и «густом зеленом лесу». Наименьшим коллективом является отдельное вхождение слова, а наибольшим — все предложение. Если нарисовать граф отношения «входить в составляющую», то он окажется деревом, которое сильно ветвится вправо. В этом находит свое отражение языковое правило, связывающее порядок слов в предложении с логическим развитием мысли.

Изучение свойств этих и иных отношений математическими методами является одной из частей математической лингвистики.

Полученные при этом результаты оказались полезными при изучении искусственных языков, в частности алгоритмических языков, на которых ведется программирование для вычислительных машин. Отметим некоторые свойства указанных выше отношений.

1. Как уже отмечалось, отношение следования является строгим линейным порядком в множестве вхождений слов в предложение.

2. Отношение управления, как правило, антитранзитивно (если x управляет y, а y управляет z, то x руководит, но не управляет z), кроме того, существует единственный «начальный элемент», которым не управляет ни одно слово (как правило, это сказуемое в предложении); наконец, ни одно слово не управляется более чем одним словом. Поэтому граф отношения управления является деревом с одним корнем. Впрочем, иногда эти свойства нарушаются (например, если в предложении имеются два или более однородных сказуемых).

3. Отношение согласования слов симметрично и рефлексивно (по аналогии с параллельностью прямых мы считаем каждое слово согласованным с самим собой). Однако оно, вообще говоря, не транзитивно, поскольку слово x может быть согласовано со словом y по числу, а со словом z по роду, слова же y и z не обязаны при этом быть согласованными друг с другом. Значит, согласование слов является отношением сходства.

4. Отношение однородности является эквивалентностью.

5. Отношение вхождения в составляющие обладает рядом любопытных свойств. Во-первых, если предложение содержит более одного слова, то для любого x найдется такое y, что либо $x \subset y$, либо $y \subset x$. При этом есть наибольший элемент (все предложение), который не входит ни в какую составляющую. Составляющие не могут частично перекрываться, а потому если $x \subset y$ и $x \subset z$, то либо $y \subset z$, либо $z \subset y$. Наконец, отношение вхождения является строгим, но нелинейным порядком.

Коротко говорят, что отношение вхождения в составляющие является древесным порядком. Этот факт лежит в основе многих построений математической лингвистики (в частности, теории порождающих грамматик Н. Хомского).

Более сложными являются связи между различными видами отношений слов в одном и том же предложении. О них, как и о других приложениях теории бинарных отношений к лингвистике, можно узнать из книги Ю. А. Шрейдера «Равенство, сходство, порядок» (М., 1971).

Приведем в заключение пример, показывающий приложения теории отношений к расшифровке текстов (эта задача давалась на Второй традиционной олимпиаде по языкознанию и математике на филологическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова).

«Множество $M_{ар}$ состоит из десяти арабских слов, записанных в латинской транскрипции:

$M_{ар}$ = {miγzal, ma'bud, mahzan, ma'mil, mirgab, ma'bar, maγzul, ma'bad, mi'bar, ma'mal}, где знаки ' и γ — специфические согласные арабского языка, а множество $M_{рус}$ — из их русских переводов: {кумир, рабочий, речная переправа, склад, пряжа, паром, завод, веретено, святилище (место поклонения), телескоп}. Требуется для каждого из арабских слов определить его русский перевод».

Для решения задачи замечаем, что в множестве $M_{рус}$ есть два смысловых отношения — R_1: «касаться одной области деятельности» и R_2: «иметь одно и то же отношение к деятельности». Оба эти отношения являются эквивалентностями и задают разбиение множества $M_{рус}$ на классы — по R_1: {веретено, пряжа} ,{телескоп}, {паром, переправа}, {кумир, святилище, склад}, {рабочий, завод}; по R_2: {веретено, телескоп, паром} — орудие деятельности, {пряжа, кумир} — объект, над которым производится действие, {переправа, святилище, склад, завод} — место действия, {рабочий} — действующий субъект.

Между арабскими словами есть два отношения— Q_1: «иметь одинаковую структуру согласных» и Q_2: «иметь одинаковую структуру гласных». Эти отношения тоже являются эквивалентностями. Им соответствуют разбиения на классы множества $M_{ар}$ по Q_1: {miγzal, maγzul}, {mirgab}, {mi'bar, ma'bar}, {ma'bud, ma'bad}, {mahzan}, {ma'mal, ma'mil}, по Q_2: {miγzal, mirgab, mi'bar}, {maγzul, ma'bud}, {ma'bar, ma'bad, mahzan, ma'mal}, {ma'mil}.

Если сравнить числа элементов в классах разбиений множеств $M_{рус}$ и $M_{ар}$, то увидим, что структура согласных характеризует область деятельности, а структура гласных — отношение к деятельности. Легко составить следующие таблицы:

Область \ Отношение	Инструмент	Объект	Место	Субъект
Прядение	Веретено	Пряжа		
Астрономия	Телескоп		(Обсерватория)	(Астроном)
Перевоз	Паром		Переправа	
Культ		Кумир	Святилище	(Жрец)
Хранение			Склад	
Производство			Завод	Рабочий

Гласные / Согласные	ia	au	aa	ai
mγzl	*miγzal*	*magzul*		
mrgb	*mirgab*		*(margab)*	*(margib)*
m'br	*mi'bar*		*ma'bar*	
m'bd		*ma'bud*	*ma'bad*	*(ma'bid)*
mhzn			*mahzan*	
m'ml			*ma'mal*	*ma'mil*

Слова, стоящие на одном и том же месте, являются переводами друг друга. В скобках показаны слова, не упомянутые в задании, но перевод которых может быть сделан по выясненным закономерностям.

8. **Исторические сведения.** Понятие отношения между различными объектами по сути дела восходит к древнегреческой логике, созданной Аристотелем. Математизация этого понятия была сделана в XIX в. английским логиком и математиком Булем (отцом известной писательницы Э. Войнич, написавшей книгу «Овод»), американским ученым Пирсом, немецким логиком Шредером и итальянским математиком Пеано.

ОТВЕТЫ

1. а) Человек a родился в городе b и т. д.; в) площадь треугольника a равна числу b; г) треугольник a описан около окружности b. **2.** См. рис. 50. **3.** Знаки соответствий: а), б), в), г), д), ж), и, к), м), р), с), у); знаки действий: е), з), л), н), о), п). **4.** График: {(25,5), (25,1), (16,2), (16,1), (7,1), (6,2), (6,3), (6,1)}. Граф на рис. 51. **5.** {(мама, а), (мама, м), (папа, а), (папа, п), (рама, а), (рама, м), (рама, р), (яма, а), (яма, м) (яма, я)}. **6.** $\{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_2)\}$; $\{(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$. Графы на рис. 52,*а*, 52,*б*. **7.** Победитель Кравков, на последнем месте Павлов.

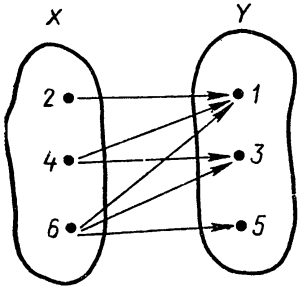


Рис. 50

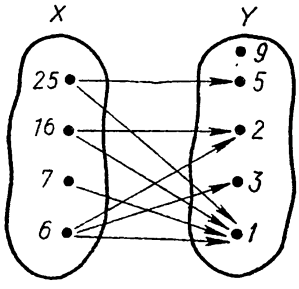


Рис. 51

Рис. 52

{(Михайлов, Айвазян), (Михайлов, Кравков), (Петров, Омельченко), (Петров, Павлов), (Омельченко, Петров), (Айвазян, Михайлов), (Айвазян, Павлов), (Павлов, Петров), (Павлов, Айвазян), (Кравков, Михайлов)}. **8.** {(Иванов, *b*), (Леонтьев, *a*), (Конюхов, *c*), (Тимаков, *b*), (Арсланов, c), (Семенов, *b*)}. В одном доме с Ивановым живут Тимаков и Семенов. **9.** График для «вписан в»: $\{(x_1, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_5), (x_4, y_5)\}$; график для «вписана в»: $\{(y_1, x_1), (y_6, x_5)\}$; график для «описана около»: $\{(y_2, x_1), (y_4, x_2), (y_5, x_3), (y_5, x_4)\}$. **10.** (*a*, 10), (*b*, 8), (*c*, 10), (*d*, 12), (*e*, 10), (*f*, 4). **12.** «уроке» — предл. ед. числа; «стол» — имен., винит. ед. числа; «рукава» — род. ед. числа, имен. и винит. мн. числа; «этих» — род. и предл. мн. числа мужск., ср., женск. рода; винит. мн. числа мужск., женск. рода; «синим» — твор. ед. числа мужск., ср. рода, дат. мн. числа, мужск., ср., женск. рода; «гении» — предл. ед. числа, имен. мн. числа. **14.** См. рис. 53. **15.** См. рис. 54. **17.** См. рис. 55. **18.** Точки: A (1; —1), B (1; 0), C (2; 1), D (2; 2), E (3; 2), F (5; 0), G (5; 2). **19.** R (4)={1; 3}, R^{-1} (5)=6. **20.** R (6)= = {1, 2, 3}, R^{-1} (2) = {16, 6}, R^{-1} (9) = $\varnothing$, R^{-1} (1)= X. Область определения совпадает с X, множество значений: {5, 2, 3, 1}. **21.** R (мама) = {м, а}, R^{-1} (м) = = {мама, рама, яма}, R^{-1} (ф) = $\varnothing$. **22.** В доме *d* не живут люди из X; Борисов не живет ни в одном из домов *a*, *b*, *c*, *d*. **23.** Множество учеников, сидящих за данной партой; множество парт, на которых сидит хоть один ученик. **24.** Пустой прообраз у Кравкова. **25.** Множество всех треугольников, вписанных в эту окружность. Из одного (треугольник вписан лишь в одну окружность). **26.** У которого сумма величин противоположных углов равна 180°. **27.** Множество положительных чисел. **28.** См. рис. 56. **29.** Всюду определены а), б), г); сюръективны б), в), г); функциональны б), в); инъективны а), б); биективно б). **30.** а) Да, б) да, в) да, г) нет; соответствие между R и R всюду определено, функционально; соответствие между R_0 и R_0 биективно. **31.** Полный прообраз для 0 состоит из чисел, кратных трем; это соответствие не инъективно. **32.** Сюръективно, всюду определено. Если X — множество простых чисел, то биективно (простое число делит-

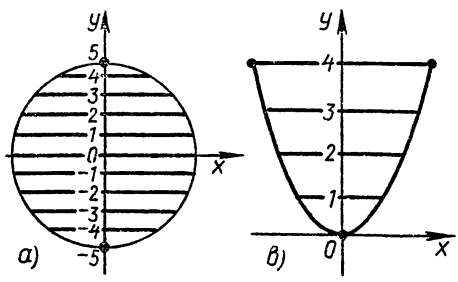


Рис. 53

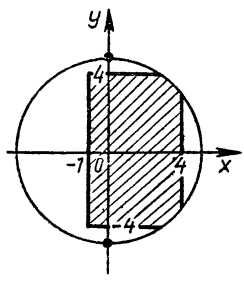


Рис. 54

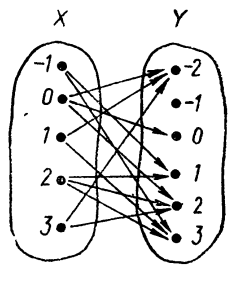


Рис. 55

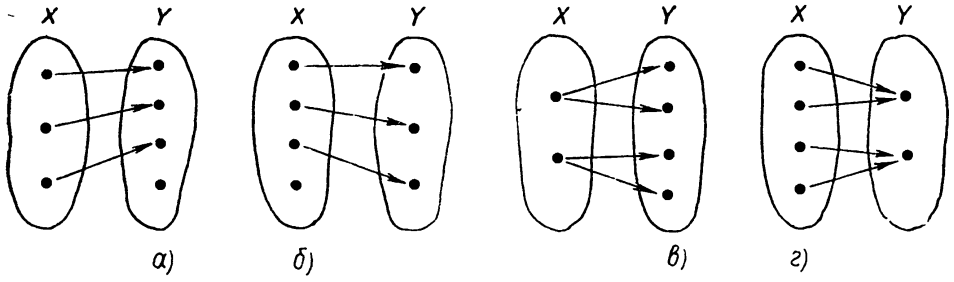


Рис. 56

ся лишь на себя), поскольку 1 в X не входит. **33.** Всюду определено. $R(X) = \{A, М, К, В, С, О, Т, Ю\}$. $R^{-1}(А) = \{$Андрей, Алеша$\}$. Полный образ пуст для букв Й, Щ, Ь, Ъ, Ы. **34.** $(a, 1) \leftrightarrow (1, a)$ и т. д. **35.** Неинъективное. При замене X на Z инъективно. **36.** Да. **37.** Функционально, всюду определено, сюръективно. Образ окружности — отрезок $[-5, 5]$. Полный прообраз отрезка $[-5, 5]$ — полоса, параллельная оси ординат. **38.** Определено не всюду (например, е, ю, я не стоят перед согласными), инъективно. $R(X) = \{$б, ж, п, ф$\}$ (перед «к» стоит полугласная «й»). **39.** Если $X = Y = N$, то инъективно **40.** Нет, да. **42.** Да, да, да. **43.** Да, нет, нет. **44.** Да. **45.** Нет, да. **48.** Нет. **49.** Нет, да. **50.** Нет. **51.** Нет, нет, да. **52.** Прямая является осью симметрии параболы. Всюду определено, инъективно, сюръективно. **53.** См. рис. 57. **54.** См. рис. 58. **55.** Периметр квадрата x равен числу y. **57.** $A \cup \{1\}$. **58.** «x — дочь y». Если $a \in A$, то a — мать x **59.** $R^{-1}(b) = \{2, 3\}$. **60.** $R^{-1}(a) = \{1, 3, 5\}$. **61.** Обратное: «число y — площадь многоугольника x», противоположное: «площадь многоугольника x не равна числу y», обратное противоположному: «число y не равно площади многоугольника x». **62.** Изобразить все стрелки, не входящие в граф R, и изменить их направление. **63.** «Многочлен y имеет корень x». **64.** «Книгу y читал человек x», «человек x не читал книгу y». **70.** В первом случае не обратно (x и y могут быть братьями), во втором случае — обратно. **72.** $(RS)(a) = \{x, z, y, u\}$, $(RS)^{-1}(z) = \{a, b, c, d\}$. **73.** «Точка X — центр окружности, вписанной в треугольник z». **74.** «Число x — площадь треугольника, описанного около окружности z», $(RS)^{-1}(z) = [3r^2\sqrt{3}, +\infty[$. **75.** Для RS: $\{(x_1, z_1), (x_2, z_1), (x_2, z_2), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_3, z_3)\}$. **76.** $\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, b), (d, a), (d, c), (e, e)\}$. **77.** См. рис. 59. **78.** a, b, d — мужчины; c, e, g — женщины. **79.** f, h, i — женщины. **80.** а) Граф «быть дедом» (у человека не может быть двух отцов). **82.** Область определения — множество мужчин, имеющих детей, множество значений — множество всех людей. «Быть отцом» сюръективно и инъективно, но не функционально и не всюду определено. **83.** а) $О \subset \overline{М}$ (отец не может быть матерью), $О \cup М = Р^{-1}$ (если $у$ — ребенок $х$, то $х$ — отец или мать $у$). $С \subset Р \cdot Р^{-1}$ (если $х$ — сестра z, то $х$ — ребенок $у$, причем z также ребенок $у$). $О \subset \overline{Р}$, $Б \subset \overline{С}$, $Б^{-1} = Б \cup С$, $Му \cap Ж = \varnothing$, $О \cap М = \varnothing$, $Р = Сы \cup Д$,

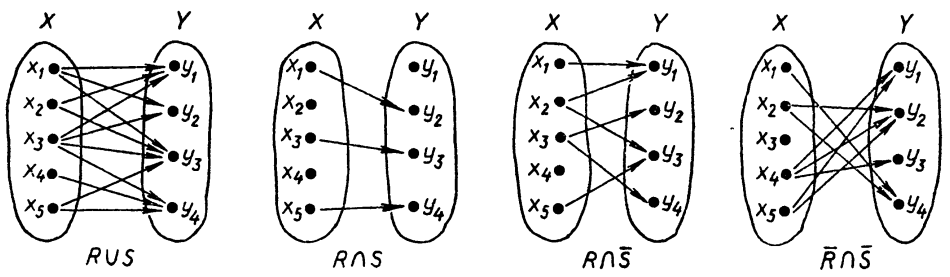


Рис. 57

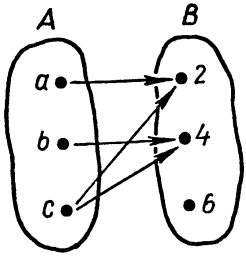


Рис. 58

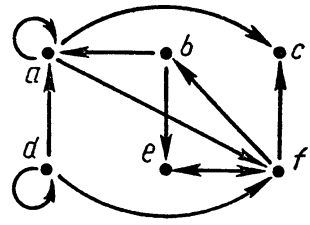


Рис. 59

Сы $\cap$ *Д* $= \varnothing$. б) «Быть дедом» $= O \cdot O \cup O \cdot M$, «Быть племянником» $=$ $= Сы \cdot Б \cup Сы \cdot С$ и т. д. в) My^{-1} — жена, $My \cup Ж$ — супруги, $O \cup M$ — родители, *БО* и *БМ* — дядя, *МБ* — мать, *ММ* — бабушка, MP^{-1} — бабушка, CP^{-1} — тетя. **84.** а). **85.** Область задания R, множество значений — луч $[1, +\infty[$. **86.** а). **87.** а) $[-4,4]$; б) $[10, +\infty[$. **89.** См. рис. 60. **92.** б) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (5, 1), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$; в) $\{(2, 1), (6, 3)\}$. **94.** $R^{-1}(\{2, 3, 4\}) =$ $= \{2, 3, 4, 6, 8\}$. **95.** Обратно «больше», противоположно «не меньше». **97.** См. рис. 61. **98.** См. рис. 62. **99.** Обратно $x \leqslant \sqrt{y}$, противоположно $y < x^2$. **100.** Область задания совпадает с множеством значений: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. **101.** Точки A $(-1; -3)$, B $(0; 0)$, C $(1; 3)$. **102.** График для RR^{-1} содержит все 16 пар слов {(мама, мама), (мама, папа), ..., (яма, яма)}. График для $R^{-1}R$ состоит из пар букв: {(а, а), (а, м), (а, п), (а, р), (а,я), (м, а), (м, м), (м, р), (м, я), (р, а), (р, м), (р, р), (п, а), (п, п), (я, а), (я, м), (я, я)}. **103.** См. рис. 63. **105.** См. рис. 64. **106.** а) A $(2; 7)$, B $(7; 2)$, б) A $(12; 5)$, B $(-12; 5)$, C $(12; -5)$, D $(-12; -5)$; в) A $(2; 5)$, B $(-2; -5)$, C $(5; 2)$, D $(-5; -2)$. **107.** а) $(1, -7)$, $(5, 5)$, $(-7, 1)$; б) $(-7, 1)$. **108.** Равны. **112.** Рефлексивно, антисимметрично, транзитивно. **113.** а), б), в), д), м), ш) рефлексивно, симметрично, транзитивно, г) антирефлексивно, антитранзитивно, симметрично, е) рефлексивно, симметрично, ж) симметрично, з), у), ф) антирефлексивно, асимметрично, транзитивно, связно, и) рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, связно, к) рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, л) симметрично, н) рефлексивно, симметрично, о) рефлексивно, симметрично, п) антирефлексивно, асимметрично, р) антирефлексивно, симметрично, с) антирефлексивно, транзитивно, т) антирефлексивно, х) антирефлексивно, симметрично, ч) рефлексивно, симметрично. **118.** Чтобы получить граф рефлексивного отношения, добавить петли в точках b и d; чтобы получить граф симметричного отношения, заменить одинарные стрелки двойными; чтобы получить граф транзитивного отношения, добавить стрелки (b, a), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c). **125.** Неверно. **126.** Нет. **127.** а), б), в), д), м), ш). **128.** Да. **129.** Иметь одинаковые отметки по геометрии, один и тот же день рождения и т. д. **130.** Нет, так как есть ученики, не участвующие в секциях. **131.** а), б). **133.** Нет, так как равносторонние образуют подмножество в множестве равнобедренных. **134.** Нет (пропущен нуль). **135.** Нет, так как перпендикулярные прямые — подмножество пересекающих. **136.** На классы, имеющие остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. **137.** На множества учеников данных школ. **138.** Нет. **139.** Не

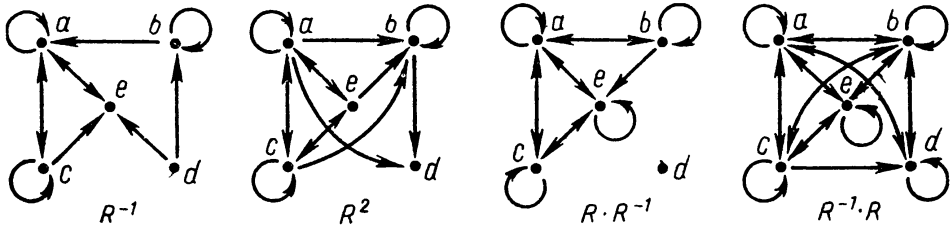


Рис. 60

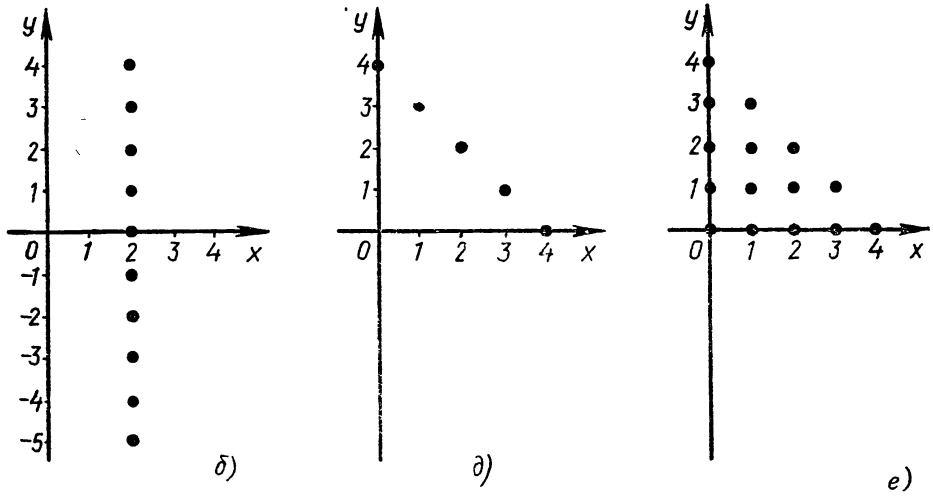


Рис. 61

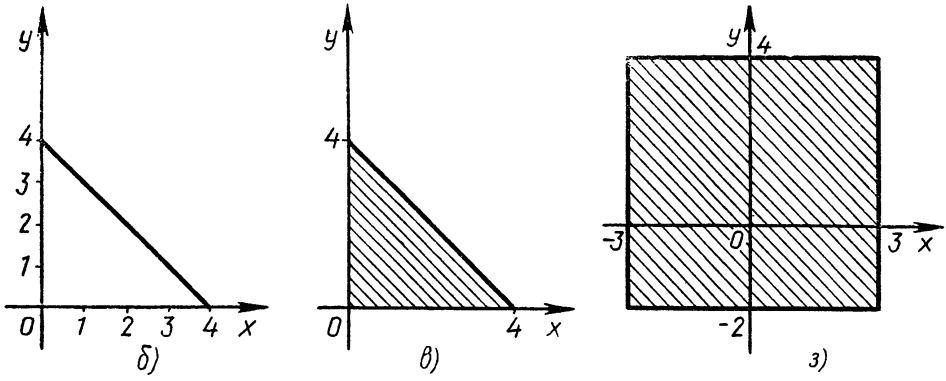


Рис. 62

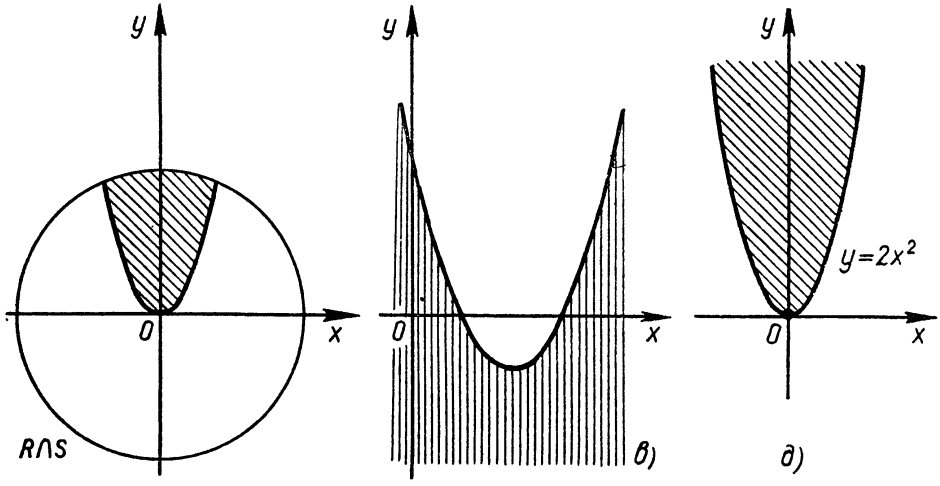


Рис. 63

Рис. 64

пересекающихся с ней (считаем, что окружность касается себя). **140.** Существительные, прилагательные, глаголы, причастия, деепричастия, числительные, союзы, предлоги, наречия, частицы, междометия. **141.** Подлежащие, сказуемые, определения, дополнения, обстоятельства места и т. д., служебные слова. **142.** Океаны, моря, озера, пруды. **144.** Да. **145.** На классы прямых, параллельных друг другу. **146.** На классы окружностей, имеющих общий центр. **148.** Нет. **149.** Нет, поскольку две горы могут иметь равные высоты. **151.** Это отношение эквивалентности. **152.** Строгого порядка: з), к), у), ф); нестрогого порядка: и), к); линейного порядка: з), и), у), ф). **153.** Да.

Игорь Николаевич Антипов
Наум Яковлевич Виленкин
Олег Сергеевич Ивашев-Мусатов
Александр Григорьевич Мордкович

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

Редактор Л. М. Котова. Художественный редактор Е. Н. Карасик. Технический редактор З. Муслимова. Корректор В. Ф. Малышева.

ИБ № 4061

Сдано в набор 23.01.79. Подписано к печати 3.07.79. 60×90¹/₁₆. Бум тип. № 3. Литерат. Печать выс. Усл. п. л. 12. Уч.-изд. л. 11,7. Тираж 272 000 экз. Зак. № 6520. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината в областной типографии управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, 153628, г. Иваново, ул. Типографская, 6.